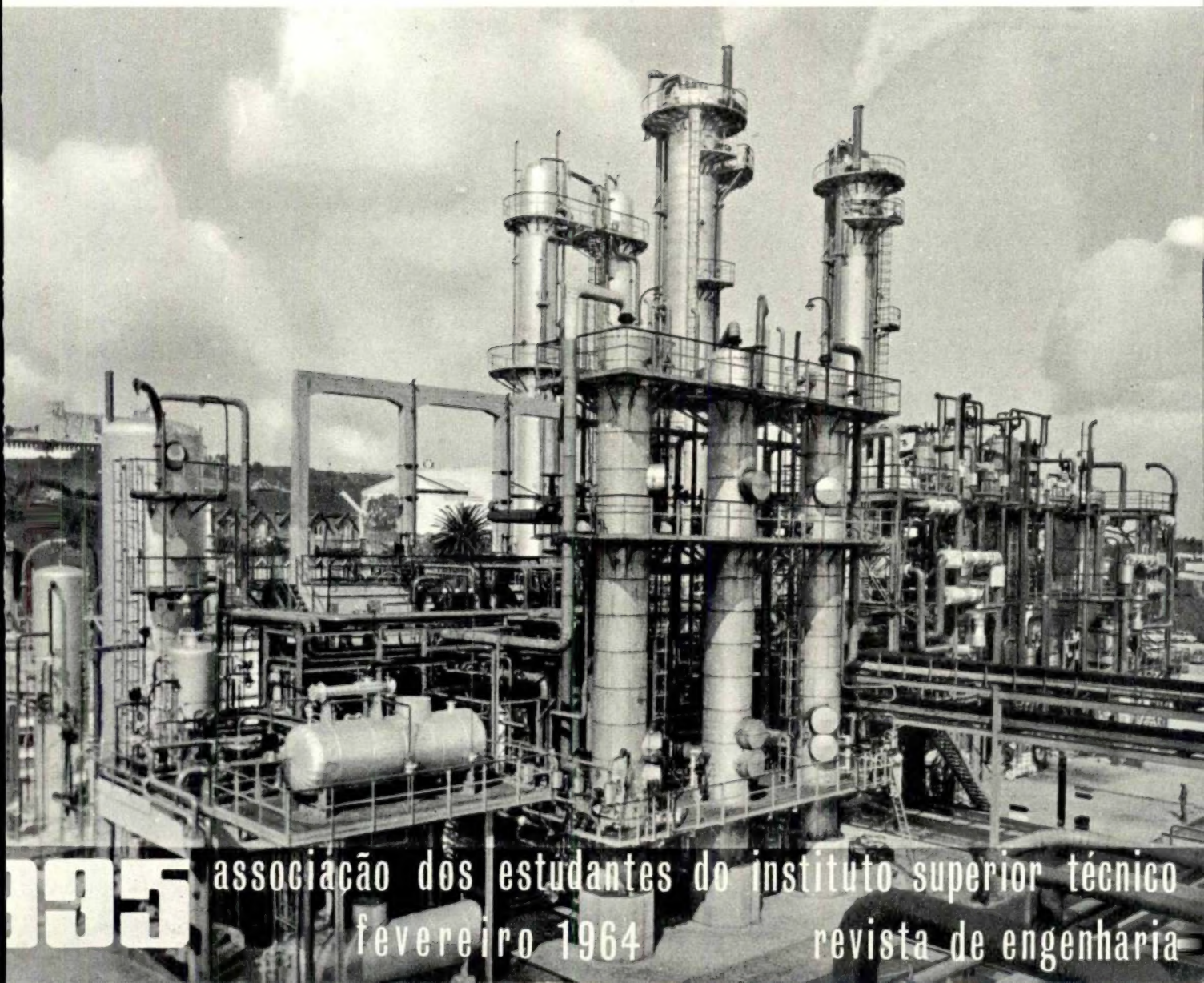
técnica



195 associação dos estudantes do instituto superior técnico
fevereiro 1964 revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos
coberturas
vigas de grande vão
asnas
perfis

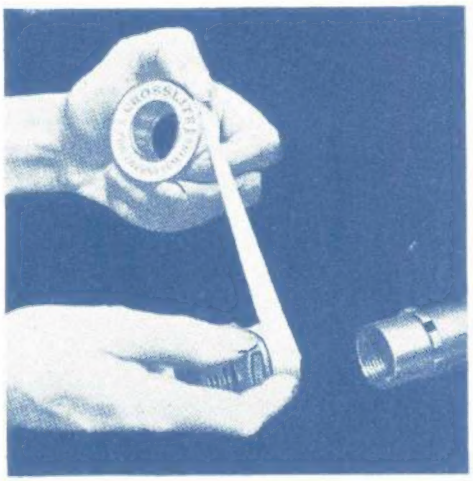
SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.
AV. EST UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D.-TEL. 774832/766446-LISBOA-5

TEM CANALISAÇÕES DE VAPOR NA SUA FÁBRICA ?
TEM TRANSPORTE DE GASES ?
TEM TRANSPORTE DE FLUÍDOS CORROSIVOS ?

Então tem problemas nas tubagens:

1 — Fugas 2 — Corrosão 3 — Calcinação das juntas

AO SEU SERVIÇO — a última conquista da química neste sector:



CROSSLITE — Fita vedante para ligações tubulares à base de Polytetrafluoreto de Etilene

- Adesão e cobertura perfeita de todas as irregularidades da rosca.
- Insolúvel e **absolutamente inerte** ao ataque químico de qualquer substância.
- Não contamina as substâncias em processo através da tubagem.
- Resiste a temperaturas de — 100º C a + 300º C.
- Preserva impecàvelmente o sistema roscado ao fim de meses ou anos de trabalho.

Um produto de

HENRY CROSSLEY LTD. — Bolton — ENGLAND

Todos os acessórios para vedação

1 bobine: ca. 14 mts. comprimento
ca. 1,3 cm. largura

Representante exclusivo:

SIDROL — Sociedade Importadora de Drogas, Lda.
Calçada de Monchique n.º 3 — PORTO — Telefs. 27826 e 32055

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 335 Fevereiro de 1964

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

DIRECTOR
J. M. VIEGAS GONÇALVES
ADMINISTRADOR
J. F. GOMES DE PINA
SECRETÁRIO
F. G. KNOPFLI BATORÉU
REDACTORES
L. M. C. BARBOSA COLEN
H. L. GIRÃO PINA

*

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA MENSAL

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	85$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

NUMERO AVULSO 15$00

*

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

*

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.da
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — SOC. PORTUGUESA DE PETROQUÍMICA — FÁBRICA DE CABO RUIVO — Vista parcial das instalações de produção de hidrogénio e gás de cidade

Págs.

Introdução aos cérebros electrónicos
Por Gustavo de Castro 291

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 306

Problema de extremos
Por António Gouvêa Portela 307

Reflexões sobre a fissuração e deformação no betão armado
Por Luís Arouca e António Mexia Heitor 321

Avaliação de perdas e localização de roturas nas tubagens de abastecimento de água
Por António Manuel de Vasconcelos 331

Utilização do reactor nuclear de 1000 KW do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares 336

Método para a fixação expedita da capacidade dum evacuador de superfície ou do amortecimento duma onda de cheia
Por Fernando Maria de Gamboa Abecasis Manzanares . . . 339

A Álgebra lógica 344

Biblioteca 355

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXVII
Araldite XXXII
Asea Eléctrica Ld.ª XX
Auto-Lusitânie XXVIII

C

CIDEX IV
CIDLA XXXIII
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia Portuguesa de Trefilaria XXVIII
Companhia União Fabril XVIII
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XXXIV
Crosslite . . . . . 2.ª da capa

E

Electro-Arco, Ltd.ª IV
Empresa de Cimentos de Leiria . . XXXVIII
Empresa Electro Cerâmica XXXIX
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXX

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Filtros Filfro XX
Fundações Franki, Lda. I

G

Guedes & Almeida, Lda. XLI

H

Hidrei XXVIII

I

I. C. I. XXXVI
Impermeábilis XXX
I. S. T. XLV
Isolux XLIV

J

Jayme da Costa, Lda XIX

L

Leopoldo Shiroi XXXV

M — Pág.

MAGUE XIII
Metalúrgica Duarte Ferreira XXXI
Monteiro Gomes, Lda. XL
Monterroso & C.ª, Lda. XLIV

N

Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa

O

Orlando Fernandes XVI

P

Papelaria Fernandes XLIII
Philips XIV
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

Q

Quimicor, S.A.R.L. XXIX

S

Siemens XV
SMEIA XXVII
Sociedade Comercial Luso-Italiana XLII
Soc. Electron . . . . . XXX e XXXII
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Industrial Metalúrgica . XXXII
Soc. Michaelis de Vasconcelos . . . XII
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Sondagens e Fundações, A Cavaco . IV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XXXV
Sorval . . . . . XXV e XXVI
Standard Eléctrica VII
S. T. E. T. . . . . XXI a XXIV

T

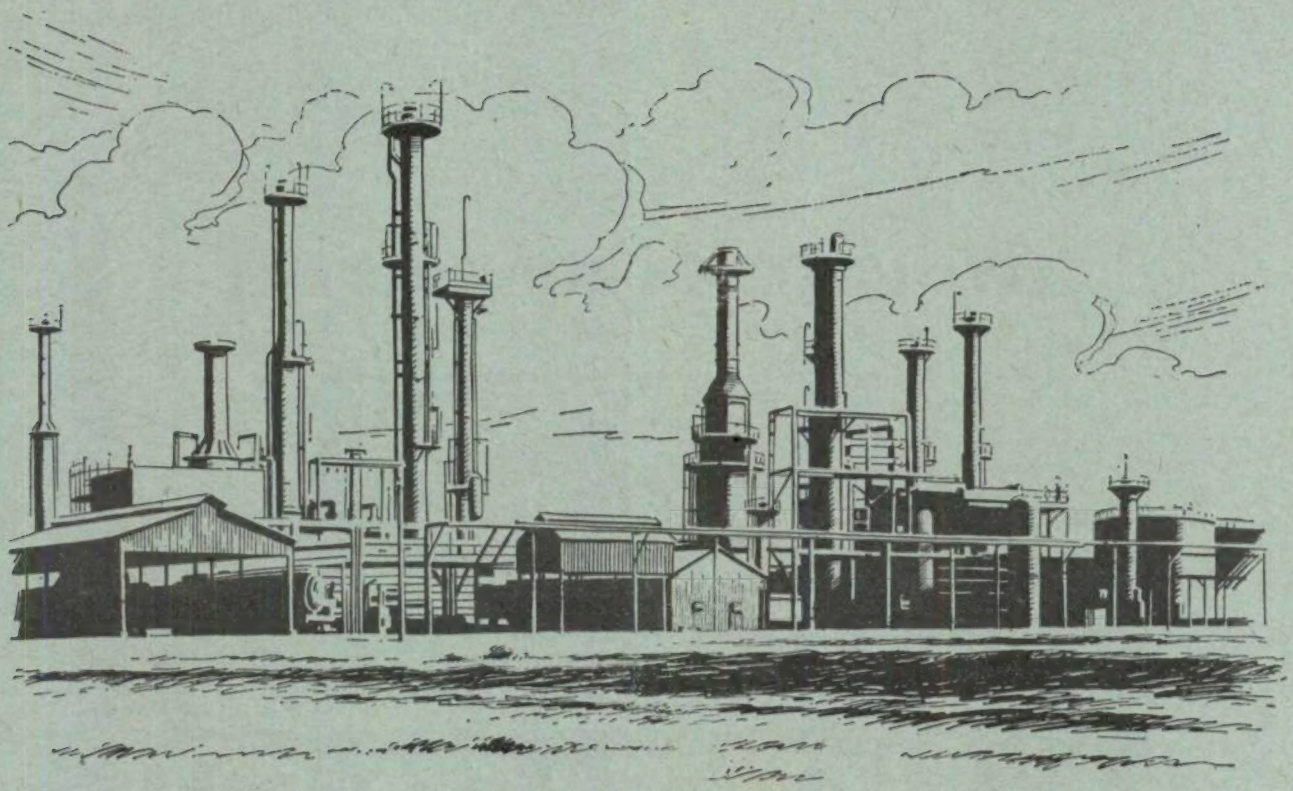
Telemec XLV

V

Vasco Pessoa, Lda. XXVIII
Von Roll V

W

Wild Portugal, Lda. XVII
W. Schmidt XXXIX



Refinaria da Sonarep
(Matola — Moçambique)

Assente sobre

ESTACAS FRANKI

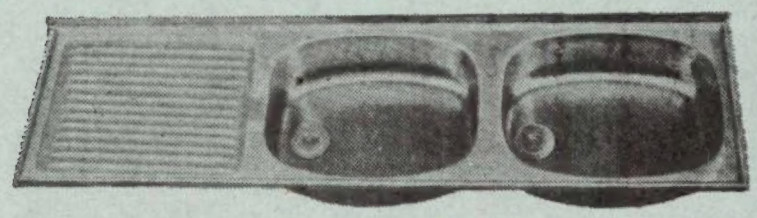
FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

Rua Braamcamp, 13, 3.°
LISBOA

★

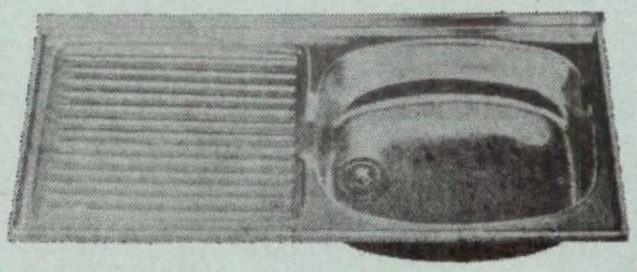
Telef. PPC 734112
End. Teleg. «FRANKI»

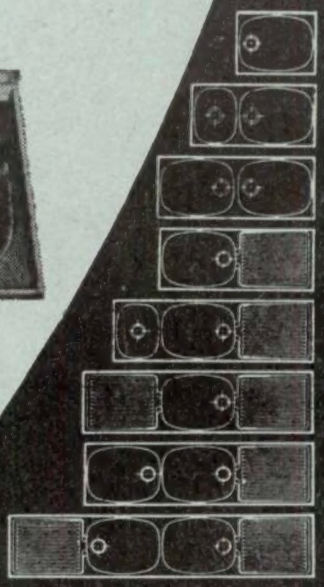
LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL



Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDÁVEL. Concepção e execução da

FABRICA PORTUGAL





elegantes e higiénicos · duração ilimitada · revestidos de isolante especial · fornecidos com sifão de segurança · não partem a louça

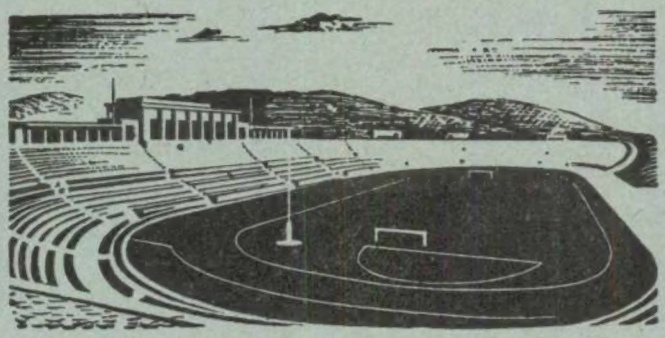
- 8 MODELOS STANDARD · OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
- MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
- IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES · RUA FEBO MONIZ

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA JARDIM DO REGEDOR, 24, 2.°
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

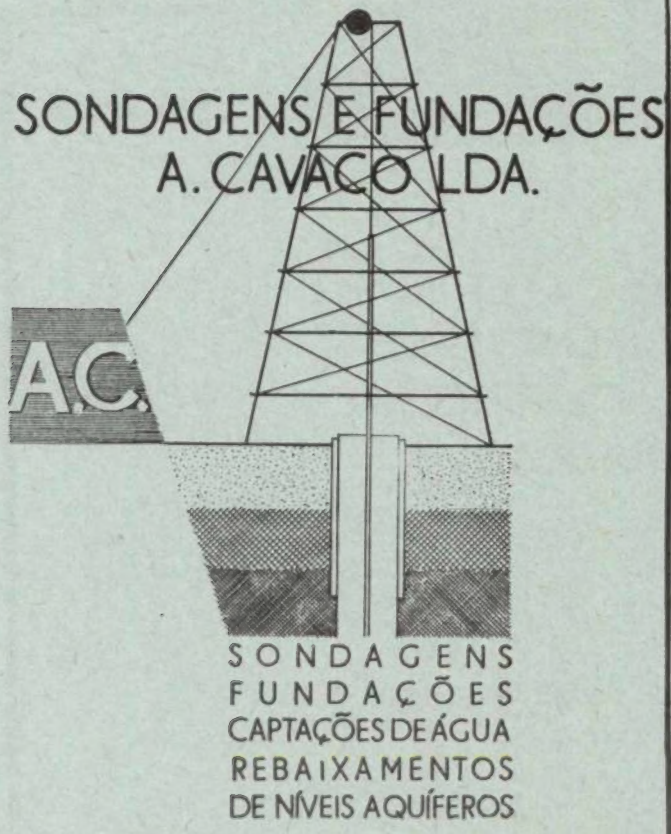
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



RUA RODRIGO DA FONSECA 62 R/C • LISBOA
TELEF. 53873-45451-57751-59562

ELECTRO-ARCO
LIMITADA

●

ELECTRODIOS
POSTOS E ACESSORIOS
PARA A SOLDADURA ELECTRICA

●

MATERIAL APROVADO PELO
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
VENDA NOVA — AMADORA
LISBOA
RUA SILVA CARVALHO, 239 — TEL 683649
PORTO
RUA DO BOLHÃO, 216 — TEL 21277

Válvulas de cunha, para vapor
Placas de obturação articuladas sobre uma esfera. Estanqueidade permanente

1 Válvulas de passagem
Sede de estanqueidade e haste de aço inoxidável

2 Válvulas para matérias pastosas
Sem necessidade de conservação (sem prensas-estopa nem tampas de limpeza)

3 Válvulas de sede obliqua
para ácidos. Liga cromo-niquel-molibdeno

4 Valvulas de membrana de borracha
Sem prensa-estopa

5 Válvulas de macho
Com elevada resistência aos ácidos

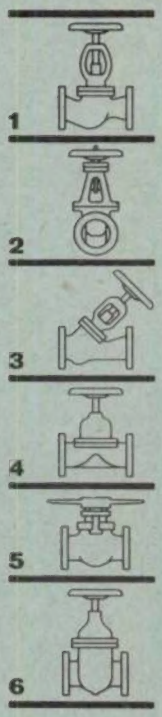
6 Válvula de cunha Sem prensa-estopa

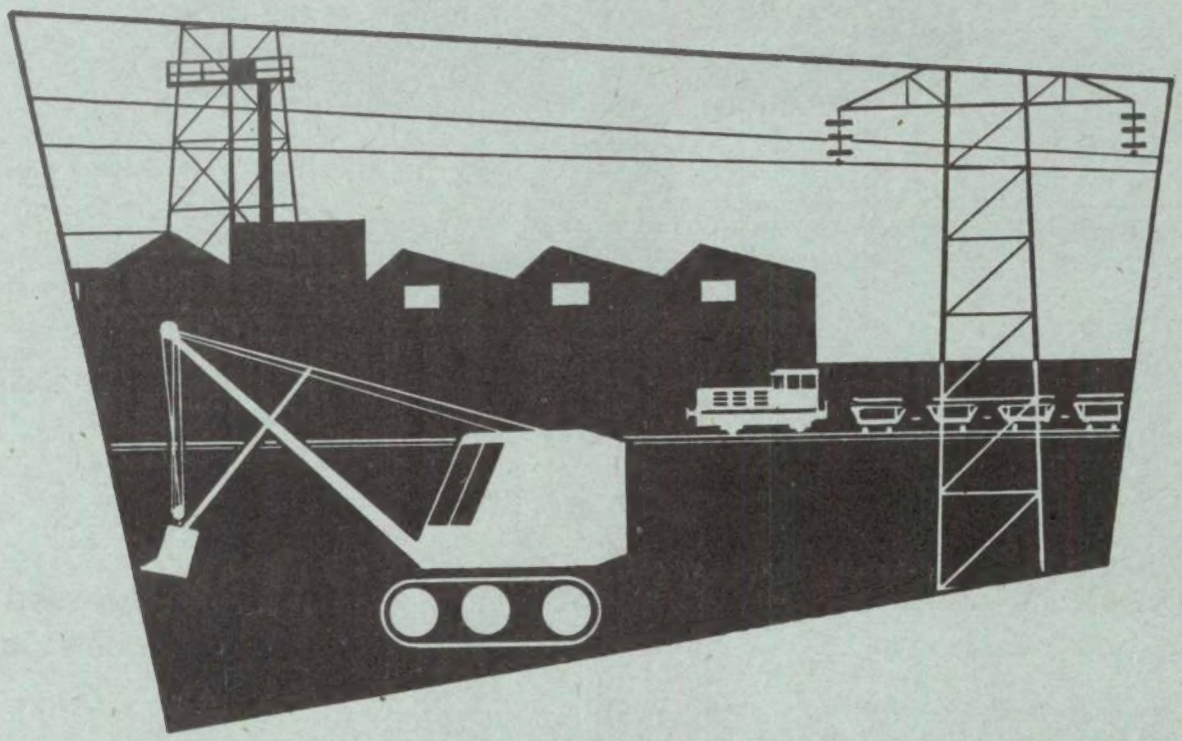
VON ROLL S.A.

Fábricas de Klus (Suiça)

Representantes em Portugal:
Socotel, Lda.
Rua Sá da Bandeira, 651-4°, Porto
Tel. 27013

à frente no progresso da construção de válvulas





MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS. ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES **C. SANTOS, S. A. R. L.** — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 4 7812-5 0129
LISBOA

COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS

*

TECTOS

*

PAREDES

*

CÂMARAS FRIGORÍFICAS

*

ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º • TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS

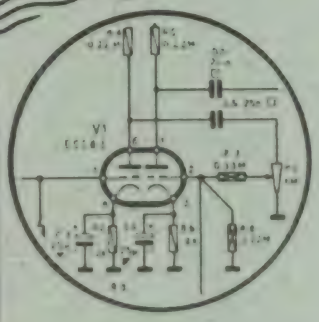
IMPERMEABILISADOR

IMEPA

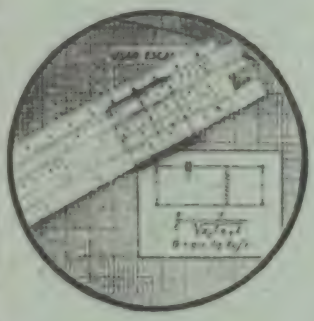
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º - LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM



CONCEBIDO BEM CALCULADO CONSTRUIDO



LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

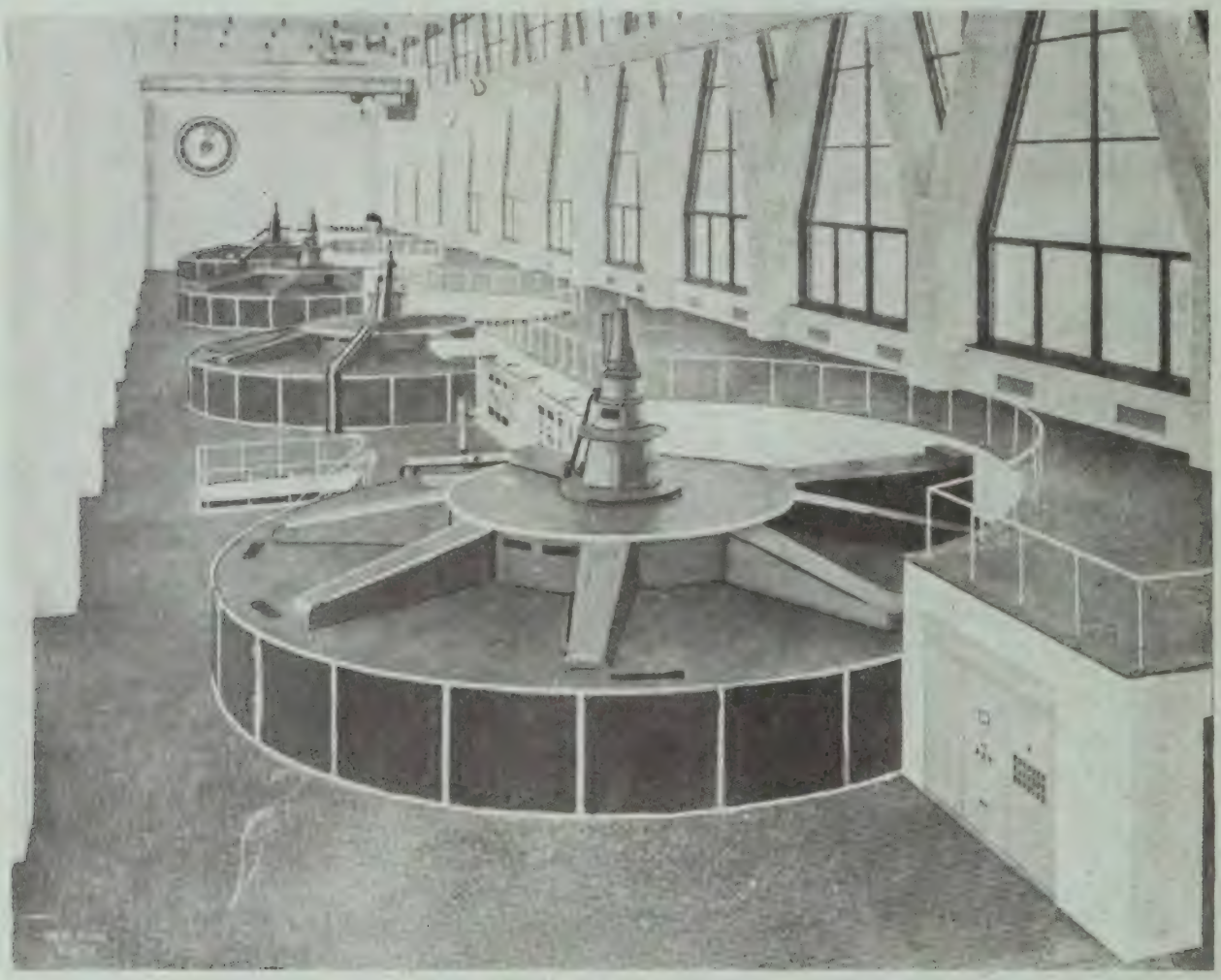
Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

Ateliers de Construction Oerlikon—Zurich 50

Alternadores accionados por turbinas hidráulicas, para todas as potências e condições de exploração, pequenas e grandes velocidades

Central hidroeléctrica de Birsfelden (Suíça), sobre o Reno. Alternadores de 26.000 kVA, cada um, 6.600 V, 68 rot/min, 50 Hz. Diâmetro: 14 metros



Representante para Portugal e Ultramar: **Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda.**

PORTO — P. da Liberdade, 114 LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

DIRECTOR: J. M. VIEGAS GONÇALVES ADMINISTRADOR: J. F. GOMES DE PINA
SECRETÁRIO: F. G. KNOPFLI BATORÉU

Ano XXXIX — N.º 335 Fevereiro de 1964

C. D. U. 621.391

INTRODUÇÃO AOS CÉREBROS ELECTRÓNICOS

POR GUSTAVO DE CASTRO
Matemático (L. N. E. C.)

O computador ABCD

OS COMPUTADORES. O computador ABCD (que não existe mas podia existir) é um computador electrónico, de programação interna, aritmético e universal, imaginado para simplificar esta exposição. Naquela designação acrescenta-se ao substantivo computador — que em si quer dizer uma grande máquina de cálculo automático — vários atributos com que se distinguem os principais computadores existentes de outras máquinas de cálculo automático. Do MARK I (o calculador automático terminado em 1944 na Universidade de Harvard e o primeiro dos grandes computadores) às máquinas que agora equipam os centros de cálculo automático do mundo há já uma longa evolução; aqueles atributos são características do estado actual dessa evolução.

O adjectivo *electrónico* opõe-se a mecânico e electromecânico. Quer dizer que os dispositivos com que agora se fabricam os computadores são dispositivos electrónicos. Electrónico não significa bizarro, caro, frágil ou inseguro; no estado actual da tecnologia significa directo, barato, resiliente e seguro.

O *computador de programação interna* é um computador que não recebe as suas ordens, passo a passo, do exterior. O programa que em dado cálculo tem de cumprir é armazenado nos seus registos no princípio do cálculo, como os próprios dados sobre que actuará; as ordens são exploradas logo antes de serem cumpridas, no decurso do cálculo.

O computador *aritmético* é o computador que, como as máquinas de secretária, executa as operações aritméticas simples, que são a base das suas possibilidades. Distingue-se assim dos calculadores analógicos (de que a régua de cálculo e o contador da electricidade são exemplos) porque nos computadores analógicos se não executam operações aritméticas, por processos como os que as pessoas usam, mas se fazem medições de grandezas. Os computadores aritméticos também se chamam digitais; os computadores analógicos também se poderiam chamar geométricos. A ponte de Wheatstone, permitindo, com uma força electromotriz e algumas resistências, a realização de multiplicações e divisões, é um computador analógico.

Um computador *universal* opõe-se às máquinas construídas para a execução de cálculos de uma categoria bem definida, ao serviço de um utilizador que os tem de realizar, com novos dados, muitas vezes. Tais como as máquinas de secretária, os computadores universais pretendam então ser instrumentos de cálculo *matemático*, aptos a satisfazerem todas as solicitações que assumam a forma de um cálculo. Pelo contrário, pode querer-se a realização contínua dum mesmo programa, sem exigências de precisão mas com os resultados numa forma expressiva; um calculador, não universal mas adequado ao programa

imutável, que dê o resultado com uma agulha ou num gráfico pode ser preferível.

A ANÁLISE NUMÉRICA. A afirmação de que os principais cérebros electrónicos assentam as suas possibilidades nas quatro operações deve completar-se dizendo que as fazem a velocidades muito grandes, com pequena incidência de erros, raros e curtos tempos de avaria. Para as pessoas sem grande experiência pode parecer estranho que, numa ciência em grande parte ocupada na determinação de números, tudo se reduza às quatro operações. Esclareçamo-nos com um exemplo.

O estudo dos integrais definidos é um dos problemas mais importantes da análise matemática; o seu cálculo, nos termos da análise infinitésimal, é um problema muito difícil que o principiante considera razoàvelmente o mais formidável dos que se lhe podem propor. O problema é, nos termos em que se põe, quase sempre insolúvel se não houver cuidados na sua formulação (circunstância que escapa, aliás. ao principiante). Como problema de análise numérica, porém, o cálculo de um integral definido não é um problema difícil.

A análise numérica é precisamente a disciplina onde se criam e arrumam as técnicas pelas quais os cálculos matemáticos se reduzem às quatro operações. Seja, por exemplo, o cálculo de um integral definido.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

em que a e b são números e f(x) a função a integrar, representada no intervalo (a,b) como se vê na Figura 1.

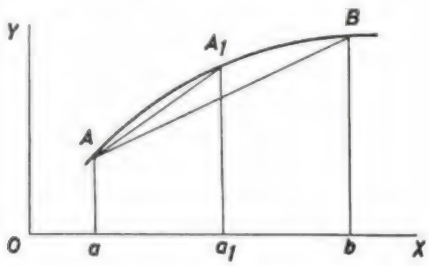


Fig. 1 — Regra do trapézio

Segundo a teoria, I é a área limitada pela curva, o eixo e as ordenadas levantadas em a e b. Os métodos *numéricos* são em geral métodos aproximados; o problema que se põe é o da escolha da superfície, cuja área seja fácil de calcular e pouco diferente da área I. Uma solução simples está em tomar a área do trapézio, abBA; teremos então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(f(a) + f(b)) + E \qquad (2)$$

e o que se sugere é que se despreze E. O erro que se comete é o valor de E, isto é, a área limitada pela curva e a corda AB, é um erro considerável.

Sem abandonar o princípio, podemos agora levantar uma ordenada por a_1, a meia distância entre a e b, e aplicar às duas partes a regra do trapézio. Tem-se agora

$$I = \frac{1}{2}\,(f(a) + f(a_1)) + E' + \frac{1}{2}\,(f(a_1) + f(b)) + E'' \qquad (3)$$

ou desprezando $E' + E''$,

$$I = \frac{1}{2}\,f(a) + f(a_1) + \frac{1}{2}\,f(b) \qquad (4)$$

com um erro bastante menor do que o primeiro. Se dividirmos o intervalo (a, b) em muitas partes iguais — n partes iguais, de comprimento h — obtém-se um valor cuja aproximação cresce com n; para funções suficientemente regulares, o erro pode tornar-se tão pequeno quanto se quiser; quando o sentido da concavidade da curva mude, há uma compensação de áreas, em excesso e em defeito que apressa a redução do erro. Chega-se assim à regra do trapézio para o cálculo dos integrais definidos.

$$I = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (5)$$

onde os yy são os valores da função nos pontos de divisão do intervalo. A fórmula mostra que, conhecidos esses valores (a função pode ser, por exemplo, determinada experimentalmente), as quatro operações bastam para o cálculo do integral. Quando a função seja dada numa tabela, o cálculo dos valores não tabelados pode fazer-se por fórmulas de interpolação *aritméticas* que só envolvem, também, as quatro operações.

REGISTOS, MEMÓRIAS. NÚMERO E COMPRIMENTO. O computador ABCD pode considerar-se à primeira aproximação como um conjunto de *registos* ou *locais*, dos quais os mais importantes se chamam *memórias*. Um registo é (Figura 2) um lugar onde se formam fieiras de

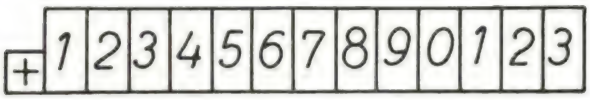


Fig. 2 — Um registo ou memória

dígitos, sequências de realizações materiais de dígitos, e se pode imaginar (vejam-se as janelas das máquinas de calcular manuais) como fieiras de algarismos árabes. O acumulador duma máquina de secretária é um registo. Além de dígitos também se realizam sinais, como se vê na Figura 2. O conteúdo de uma memória chama-se *palavra* ou *termo*. As memórias estão numeradas e o número de cada memória é o seu *endereço*. Representemos por 123) o conteúdo da memória 123, por x o da memória X; para significar o endereço da memória que contém o número 123 escreveremos (123) ou loc 123 (de *locus*, lugar).

Para o utilizador, as primeiras características de um computador, relativas à sua *capacidade*, são o número de memórias e o comprimento das palavras. O computador ABCD tem 1000 memórias, cujos endereços são 000, 001, . . . 999; a palavra é de 13 dígitos decimais, e sinal. Os registos de memória, ou memórias, da máquina formam a sua *memória*.

Quando se queira representar o conteúdo de partes da memória do computador escrever-se-á, por exemplo

567) + 1124125125568
568) + 1123124124569
. . .
571) + 1124126127678

ou, por motivos que imediatamente se verão,

567) + 1 124 125 125 568
568) + 1 123 124 124 569
. . .
571) + 1 124 126 127 678

Além das memórias onde se inscrevem os dados, o programa de cálculo e os resultados, o computador deverá ter circuitos de interpretação do programa, de execução de cálculos e outras operações, de contrôle geral, que estão, por enquanto, fora dos nossos interesses; os conteúdos da memória em épocas sucessivas (segundo uma cadência característica do computador) constituem os instantâneos dos passos sucessivos no processo de cálculo. Depois do número de memórias que um computador tem e de quantos dígitos tem cada palavra, importa saber o sistema de numeração que a máquina usa. Na memória do computador ABCD há em cada época 1000 palavras. Cada palavra é constituída por 13 dígitos decimais (decits); além disso há uma 14.ª posição à esquerda onde figura um sinal algébrico. A aritmética que utiliza é a decimal.

Uma palavra pode ser um *número* ou o código de uma *instrução*. Como se entenderá melhor mais adiante, esta ambiguidade sobre que se fundam muitas das virtualidades dos computadores é desfeita pela máquina, que trabalha a dois tempos. Num dos tempos, o *tempo de instrução*, a máquina vai a uma memória procurar que fazer e toma o seu conteúdo como um código que decifra nos circuitos adequados; no outro tempo, o *tempo de execução*, a máquina, procurando numa memória um número, interpreta como tal o que lá encontra.

Assim

567) + 1124125125568

quer dizer que a memória 567 contém o número

0,1124125125568

ou a instrução «*some o conteúdo da memória 124 com o conteúdo da memória 125 e ponha o total na memória 125; vá buscar à memória 568 a instrução que cumprirá a seguir*». Neste último caso preferirá escrever-se

567) 1 124 125 125 568

Como se disse, a ambiguidade não subsiste no processo de cálculo; se a máquina, tendo acabado a execução de uma ordem, vai ao registo 567 buscar uma instrução, analisa o conteúdo do registo supondo-o uma instrução; se, na execução de uma ordem, a máquina vai buscar ao registo 567 um número, interpreta o termo como sendo o número que procura. No seguimento omitiremos, como aqui, o sinal nas instruções.

As memórias retêm as palavras que nelas se formam emitindo-as para os circuitos aritmé-

ticos ou outros registos no decurso dos cálculos quando a máquina interpreta e executa uma instrução que comanda essa emissão. A substituição do conteúdo de uma memória é realizada por instrução, também.

Quando se comanda a inscrição dum termo numa memória o seu conteúdo é prèviamente rasurado; mas quando se comanda uma operação em que intervém o conteúdo duma memória, este conteúdo permanece. A maneira, portanto, de «limpar» uma memória é comandar a inscrição do zero.

Dos registos que não são memórias o mais importante é o *acumulador*, que se representa geralmente por A como o seu conteúdo por a. O acumulador é um registo *aritmético* onde se formam resultados de operações. No computador ABCD o acumulador não é *endereçável* e não tem que interessar-nos como utilizadores.

ESTRUTURA DAS INSTRUÇÕES. Posto isto, que informação deve o computador encontrar codificada numa instrução para executar uma operação aritmética? Suponha-se que o computador está construído para executar *as quatro operações*, interessando dois dados, (a e b) para obter um resultado (c). Cada instrução deve então indicar a operação, os endereços dos dois dados (A e B) e o endereço da memória onde o resultado será inscrito (C).

Veja-se que, uma vez cumprida a instrução corrente, o computador tem de saber onde encontrar a que deverá cumprir seguidamente. No computador ABCD o endereço da memória onde o cumputador vai procurar o que fazer, depois de cumprir a instrução, é indicado nesta instrução por D.

Quando uma palavra é uma instrução os seus 13 dígitos são utilizados na codificação da informação agrupados da esquerda para a direita como indica a decomposição

$$13 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3$$

O primeiro decit indica a operação segundo a correspondência

1	adição
2	subtracção
3	multiplicação
4	divisão

Os três seguintes compõem o endereço A do dado a; os três seguintes, o endereço B do segundo dado; os outros três, o endereço C do resultado. Finalmente, os últimos três compõem o endereço da memória onde se encontra a instrução seguinte. Este quadro resume o que acaba de dizer-se:

CÓDIGO		ACÇÃO
1	ABCD	$a + b \rightarrow C, \rightarrow D$
2	ABCD	$a - b \rightarrow C, \rightarrow D$
3	ABCD	$a \times b \rightarrow C, \rightarrow D$
4	ABCD	$a / b \rightarrow C, \rightarrow D$

EXEMPLO. Assim, suponhamos que em certa época o contrôle está no local 567, isto é, que a máquina vai explorar 567 em busca de uma instrução a cumprir. Imaginemos que a memória apresenta o seguinte aspecto

123)					2
124)					1
125)					0
567)	1	124	125	125	568
568)	1	123	124	124	569
569)	1	124	125	126	570
570)	1	123	124	124	571
571)	1	124	126	127	678
...					

O conteúdo de 567, analisado pela máquina como uma instrução, é interpretado como a ordem de adicionar o conteúdo de 124 ao de 125, de colocar o resultado em 125 e de procurar em 568 a instrução seguinte:

$$124) + 125) \rightarrow 125, \rightarrow 568$$

A máquina vai pois somar 1 a 0 e pôr o resultado, que é 1, em 125.

Os registos de memória, lidos quando o seu conteúdo intervém numa operação, conservam-no, como se disse, até que recebam a ordem de inscrição do conteúdo de outra memória, que pode ser de rasar (correspondente a uma inscrição de zero), ou de uma leitura do exterior. Portanto, executada a instrução 567), a única alteração no panorama da memória é agora que 125) é 1, em vez de 0. Tem-se, pois,

123)	2	124)	1	125)	1

Passando à instrução 568), o computador interpreta-a como

123) + 124) → 124, ↩ 569

e o panorama é, no fim da sua execução,

123)	2	124)	3	125)	1

Continuando, executada 569), tem-se

123)	2	124)	3	125)	1
				126)	4

no fim de 570)

123)	2	124)	5	125)	1
				126)	4

e no fim de 571)

123)	2	124)	5	125)	1
				126)	4
				127)	9

Observe-se que as instruções 568) e 570) colocaram em 124 os números 3 e 5; uma instrução 572) idêntica faria aparecer 7. O programa pode pois ser prolongado por forma a gerar em 124 a sucessão dos números ímpares, enquanto houver espaço para armazenar as instruções correspondentes. Por outro lado, as instruções 567), 569) e 571) fizeram aparecer a partir do local 125 os *quadrados* 1, 4, 9. Como se sabe, desde Pitágoras, as somas parciais obtidas na série

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots.$$

constituem a sucessão dos quadrados perfeitos, como recorda a Figura 3

						+	+	+	+
			+	+	+	o	o	o	+
	+	+	o	o	+	o	o	o	+
o	o	+	o	o	+	o	o	o	+

Fig. 3 — Cálculo de quadrados

Exercício 1. Prolongar o programa anterior por forma a calcular os quadrados dos primeiros 10 inteiros.

PROGRAMAÇÃO DE OPÇÕES. A primeira instrução, que ultrapassa a automatização linear de uma sucessão de operações aritméticas, abrindo assim promissoras possibilidades é a da *programação de opções*. A instrução é [1]

5 ABC ↩ C sss a > b
↩ D sss a ≤ b

Trata-se de uma *instrução de contrôle*: a máquina recebe a ordem de ir procurar, analisar e cumprir *uma outra instrução*. Esta outra instrução pode ser uma de duas, ou a instrução contida em C ou a instrução contida em D, e o que decide qual das instruções vai ser cumprida é a comparação dos conteúdos dos registos A e B. Se o número em A for maior que o número em B, a máquina transfere o contrôle para C; se não, o contrôle é transferido para D. Ora em A e B podem estar resultados de cálculos anteriores o que dá à máquina a aparência de uma autonomia, que de facto não é mais do que a execução do que se contém na instrução 5.

Esta instrução é uma instrução de transferência (ou salto) condicional. Quando houver que transferir o contrôle para a memória Z, incondicionalmente, bastará usar a instrução

5ZZZZ

Exercício 2. Verificar que a instrução

5ZZZZ

é uma instrução de salto incondicional para Z.

Outra instrução de contrôle é a ordem de paragem

OABCD

onde os endereços são mudos e se pode representar sempre por uma sucessão de 13 zeros. Suponha-se o pormenor do programa

789)	5	100	200	790	791
790)	0				

Quando na execução o controle passasse para 789, e o conteúdo de 200 não atingisse o número guardado em 100, o cálculo pararia. No caso contrário, o contrôle passaria para 791 onde poderá principiar um novo cálculo. Este cálculo só se efectuará, portanto, se o número em 200 (que pode ser resultado dum cálculo anterior)

[1] A abreviatura sss quer dizer «se e só se» ou «sempre que e só quando».

não for menor que o número em 100 (que pode ser uma constante introduzida inicialmente.

LEITURA E ESCRITA. As ordens de *input--output*, de cópia (para dentro e para fora do computador), ou de leitura ou de escrita, são

6ABCD → A,B ↩ D

7ABCD ↓ A,B ↩ D

A instrução 6 manda *ler* para as memórias de A a B, incluídas ambas, e transfere o contrôle para D. A instrução 7 manda *escrever* das memórias de A a B, incluídas ambas, e transfere o contrôle para D.

Vamos supor que o computador lê fita perfurada e escreve perfurando fita. A fita pode ser de quatro fileiras, representando-se em binário os dígitos, como na Figura 4, e os sinais por duas composições disponíveis.

0	.	.	.	.	5	.	+	.	+
1	.	.	.	+	6	.	+	+	.
2	.	.	+	.	7	.	+	+	+
3	.	.	+	+	8	+	.	.	.
4	.	+	.	.	9	+	.	.	+

POSITIVO + + + +
NEGATIVO + + + .

Fig. 4 — Código de perfuração

O computador, quando decifra uma ordem de leitura, activa o leitor de fita e pára se não houver fita colocada; havendo fita, esta corre até ao primeiro sinal de + ou —. Este sinal e os dígitos seguintes (até ao próximo sinal e no máximo de 13) são colocados na primeira memória (A) indicada na instrução, o próximo sinal e os seus dígitos na memória seguinte, e sucessivamente até se ter preenchido a segunda memória (B), indicada na instrução; o contrôle passa então para D. O computador pára de ler se a fita se esgota, o que permite ler um número ignorado de palavras.

Note-se que, além da leitura comandada por instruções de programa, tem que haver leitura comandada exteriormente — *pelo menos para fazer entrar um programa de leitura*. O computador tem, num painel de comando, um botão de leitura L e uma série de botões onde se inscreve, com os dígitos decimais codificados em binário (diz-se, em DCB), o endereço E da primeira memória a preencher, como se mostra na Figura 5 (onde se tem representado o endereço 567, premidos os botões +). Além do botão L, o painel tem ainda o botão I que serve para principiar a execução do programa cuja primeira instrução esteja na memória E; começado o cálculo, outros subprogramas podem ser cumpridos a partir de ordens de transferência para os locais onde a sua inscrição se inicia.

.	+	.	+
.	+	+	.
.	+	+	+
L		I	
Leitura		Início	

Fig. 5 — Pormenor do painel de contrôle do computador

OPERAÇÃO DO SISTEMA. Por muito importante que seja a parte que o computador tem na actividade de um centro de cálculo, outras entidades são igualmente indipensáveis numa ou noutra estação do processo de cálculo. O problema que o computador resolve começou por ser, por exemplo, um problema de física. A *análise matemática*, mais ou menos complexa, leva à sua formulação como um problema de cálculo; nesta altura, quere-se determinar um número ou um sistema de números. Poderá dizer-se que se trata sempre de resolver uma equação ou um sistema de equações, mas esta generalidade é inútil; convém antes ver se o problema cabe num dos seguintes grupos, por exemplo, ou se é susceptível de ser decomposto em problemas que caibam, o que acontecerá quase sempre:

1. Cálculos de valores de funções dadas por fórmulas ou tábuas (empíricas ou calculadas).
2. Solução de sistemas de equações lineares; determinação de valores próprios e vectores próprios de matrizes; outros cálculos ligados à álgebra matricial.
3. Solução de equações não lineares, ou de sistemas destas equações.
4. Cálculo de valores de funções dadas por equações diferenciais (ordinárias ou parciais) e condições nos limites (fronteiras no espaço ou épocas no tempo).

5. Cálculos de derivadas de funções em pontos, ou de integrais em intervalos, dadas as funções por tábuas.

6. Cálculos de valores de funções dadas por equações integrais.

7. Cálculos envolvendo compensação e filtragem, como os de mínimos quadrados e de análise harmónica, clássica ou generalizada.

8. Cálculos de extremos, como os da programação linear.

Analisado o problema de cálculo, há que escolher os algoritmos, as técnicas de *aritmetização* aplicáveis em cada ocasião e ainda que estabelecer a concatenação das partes, o correr do processo. Aquela escolha põe problemas de análise numérica; esta concatenação constitui a *ordenação* e faz-se, as mais das vezes, com organigramas. A aritmetização e a ordenação do problema de cálculo é a *programação* pròpriamente dita. Segue-se depois a *codificação* das rotinas parciais e a sua *integração* no programa, implicando a codificação das articulações. A aritmetização, a ordenação, a codificação e a integração constituem a programação no sentido lato de que sai o *programa*. Os computadores modernos são por vezes descritos como máquinas aritméticas de programa interno; quer-se com isto sublinhar que a máquina obedece durante a execução do cálculo a um programa que está inscrito nos seus registos. A perfuração do programa e a sua leitura é portanto o passo que se sucede à integração no programa (com papel e lápis) das rotinas codificadas.

Quanto aos dados, nada impede que estejam incluídos no programa. Repare-se que num programa de cálculo há sempre constantes a considerar. Quando se queira, por exemplo, calcular valores de um polinómio, o seu e os coeficientes, bem como os valores do argumento, são constantes a dar ao computador. Agora, várias situações podem ocorrer: ou se quer um programa para uma ocasião; ou se prevêem várias ocasiões em que o polinómio é o mesmo e diversos os valores do argumento; ou se quer um programa para qualquer polinómio e quaisquer valores (a serem dados oportunamente); etc.

Como, todavia, o trabalho de programação é um esforço considerável, um encargo pesado e até uma tarefa difícil, todos os centros tendem a constituir uma *biblioteca de programas* capaz de resolver os problemas que se repetem. Em cada caso o programa está perfurado e pronto a ser lido; só resta perfurar os dados. Na verdade, os utilizadores de cada máquina tendem a organizar-se para pôrem em comum os seus programas, e uma máquina vale não só pelas suas características como pelas instituições que as utilizam. Por exemplo, o Pegasus uns anos atrás e o NATELL803 agora, só porque foram escolhidos por várias universidades inglesas, onde existe tradição valiosa de trabalho sério, trazem consigo bibliotecas de programas muito valiosas para países pobres. Há ainda um segundo motivo para separar os programas dos dados, motivo que se refere ao *espiolhamento* dos programas, seguinte à perfuração. Não se tratando de uma actividade directa de cálculo, pois que se trata da pesquisa dos erros de programação, é uma actividade considerável na realidade. Para auxiliar o espiolhamento dum programa preparam-se os dados de um exemplo, cujos diversos passos se possam obter convenientemente sem o uso do computador; a execução completa do cálculo simplificado que serve de exemplo precede, naturalmente, a operação do programa com os dados reais. Os dados reais são neste caso perfurados independentemente, embora eles e o programa possam ser fàcilmente reproduzidos numa só fita quando se queira.

Tudo isto leva à separação de duas ordens de trabalhos junto de um computador: a *programação para o computador* e a *operação do computador*. É a primeira ordem de trabalhos que temos vindo a descrever; nela a leitura do programa é seguida da leitura dos dados do exemplo e da tentativa de cálculo. Entra-se assim no *ensaio do programa*, que termina logo se a tentativa é bem sucedida, o que só raramente acontece. Quando não é assim, o programador procura fazer o diagnóstico das causas do erro, o que o leva a um momento anterior do processo de programação para introduzir correcções cujas consequências deverá seguir dali para a frente. Em geral só foi descoberto *um erro* e o programa tem vários, sucedendo-se os retornos até que o exemplo é levado do princípio ao fim correctamente.

CÁLCULO DE INSTRUÇÕES. Como se disse, o número de registos de memória de um computador (a capacidade da sua memória) é uma característica que, tanto como as velocidades a que se cumprem as instruções elementares, condi-

ciona a velocidade efectiva do cálculo. Na verdade, quando se diz que um computador faz 1000 adições por segundo deveria talvez dizer-se que adiciona à cadência de 1000 operações por segundo. Estando as parcelas memorizadas no início do cálculo, um computador com uns milhares de memórias só pode executar uns milhares de adições de uma assentada. Se, pelo contrário, as parcelas foram introduzidas oportunamente, é a duração da leitura que reduz dràsticamente aquela *celeridade*.

Num sentido largo, e todavia justo, pode mesmo considerar-se que o tempo de programação é ainda uma parte do tempo de cálculo; ora, sendo um *cérebro electrónico* perfeitamente estúpido, isto é, completamente incapaz de fazer o que não esteja programado, a programação é uma tarefa delicada, difícil e morosa. Acrescendo que dos computadores se exige a resolução de problemas que com outros meios estão fora do alcance, um ou dois anos de vários programadores vão às vezes no mesmo programa. Mesmo no *tempo de execução* dos cálculos, o tempo consumido no cumprimento das instruções que não são de cálculo, mas de ordenação do processo, é com frequência uma parte importante.

Voltemos, porém, ao caso simples e raro em que só a capacidade e a velocidade da máquina contam (como no caso da tábua de quadrados). Como vimos, cada quadrado é obtido por duas instruções, uma que calcula o novo ímpar, outra que soma este ímpar ao quadrado anterior. Contando com o local onde se guarda o quadrado, tem-se um total de 3 registos ocupados no seu cálculo; o programa ocupa o dobro da memória onde se guardam os resultados. Assim, no computador de 1000 memórias, que estamos imaginando, não poderão calcular-se de uma só vez muito mais de 300 quadrados com aquele programa.

Já se insistiu na perfeita ambiguidade das palavras que faz com que o conteúdo de um local seja uma instrução ou um número conforme o *tempo* em que a máquina o explora. Vamos agora ver como essa ambiguidade, permitindo o *cálculo de instruções* possibilita consideráveis encurtamentos nos programas onde as mesmas instruções se repetem com simples modificações de endereços e os programas constituem, a menos destas modificações, a repetição de um mesmo ciclo de cálculos.

Exercício 3. Estudar o processo de cálculo que começa com o contrôle no registo 111 sendo

111)	1	111	111	111	111

Seja outra vez o programa

567)	1	124	125	125	568
568)	1	123	124	124	569
569)	1	124	125	126	570
570)	1	123	124	124	571

. . .

A instrução 569) difere essencialmente da instrução 567) em que o terceiro endereço é 126 em vez de 125; seguidamente, a instrução 570) não difere essencialmente de 568). Se, portanto, em vez de se passar ao cumprimento de 569), se puder substituir 125 por 126 em 567) e cumprir de novo esta instrução, tem-se o mesmo resultado. Ora, visto que o conteúdo de 567 se pode considerar um número, se for cumprida a instrução

E)	1	567	(1000)	567	567

passa a ter-se, efectivamente

567)	1	124	125	126	568
568)	1	123	124	124	569

Pondo a instrução E) em 569 será inicialmente

567)	1	124	125	125	568
568)	1	123	124	124	569
569)	1	567	(1000)	567	567

que prolongamos representando por 567)′ o conteúdo de 567 depois da primeira modificação de endereço, etc.

567)′	1	124	125	126	568
568)	1	123	124	124	569
569)	1	567	(1000)	567	567
567)″	1	124	125	127	568

Como se reconhece, embora 567)′ seja exactamente o que convém, o mesmo não se passa com 567)″ que deveria ser

567)″	1	124	126	127	568

O que acaba de acontecer é característico do que se passa na programação dos pormenores

de cálculos (pelo menos para programadores de *temperamento* mais vulgar): levantando um problema, aparece uma ideia que quase o resolve, isto é, que o resolve desde que se façam ajustamentos; o programa fica mais complicado do que fazia prever a sugestão inicial e esta chega a ficar irreconhecível na sucessão final das instruções. Assim, a ordenação dos cálculos das partes faz-se de fora para dentro, da consideração do problema geral para a definição dessas partes; a codificação, pelo contrário, parte de pontos bem definidos na região do cálculo que se considera e segue de dentro para fora, introduzindo a pouco as complicações que vão resolvendo problemas residuais.

É claro que se for

569)	1	567	(1001000)	567	567

o programa é o que convém, excepto da primeira vez em que a instrução é cumprida. A solução da dificuldade estará em alterar as instruções iniciais, fazer o que se chama a *preparação* do ciclo. Basta para isso, como fàcilmente se reconhece, que se parta do estado inicial.

123)	2	124)	3	125)	1

e se mande

567)	1	124	125	126	568
568)	1	123	124	124	569
569)	1	567	(1001000)	567	567

Teremos

567)'	1	124	126	127	568

que encontra

123)	2	124)	5	125)	1
				126)	4

e deixa

123)	2	124)	5	125)	1
				126)	4
				127)	9

O programa vai executar o cálculo de quadrados enquanto este cálculo não violar algum pormenor de construção, ou o programa se não alterar a si próprio pela repetição não limitada da modificação do endereço. É preciso programar um fim de cálculo.

Exercício 4 Descrever o desenrolar do programa anterior.

CONTAGEM E ENSAIO. Quando um ciclo deva repetir-se n vezes terá que programar-se: i) a *contagem* do número de repetições concluídas; ii) o *ensaio* que no fim de cada iteração determinará se n foi atingido ou não; iii) a *transferência* (para o princípio do ciclo enquanto se não tenha atingido n, e para o seguimento quando se tenha atingido n).

O contador é uma memória K, que no início do cálculo contém 2 (por motivos que se verá) e a cujo conteúdo se soma uma unidade por cada repetição. A instrução

Kl)	1	(1)	K	K	X

soma ao conteúdo de K uma unidade sempre que seja preciso, transferindo depois o contrôle para X.

O ensaio compara k com n transferindo o contrôle para um princípio de ciclo quando $n > k$ e para o seguimento (que, suponhamos, começa em S) quando $n = k$. Recorde-se que a instrução

5ABCD

comanda a acção

↱	C	sss	$a > b$
↱	D	sss	$a > b$

A instrução do teste é, então,

T)	5	N	K	Kl	S

A transferência para Kl significa que se vai aumentar o número de repetições da unidade correspondente à repetição que se inicia imediatamente. O último endereço em Kl deve pois ser 567.

Pode agora fixar-se os *endereços simbólicos* pondo, por exemplo,

$N = 121$ $\quad$ $T = 568$
$K = 122$ $\quad$ $Kl = 569$

o que arrasta ajustamentos nos restantes endereços. O programa para o cálculo e perfuração de n quadrados é, agora,

567)	1	124	125	126	568
568)	5	121	122	569	572
569)	1	(1)	122	122	570
570)	1	123	124	124	571

571)	1	567	(1001000)	567	567
572)	7	125	125 + n		573
573)	0				

Os computadores ABC

ECONOMIA E SIMPLICIDADE. Quando se revêem os planos de um computador com o objectivo de se introduzirem melhoramentos, são vários os objectivos que se perseguem, vários os critérios por que se aferem esses melhoramentos e diversos os motivos que os tornam possíveis. Assim, os progressos da tecnologia podem tornar possível a realização de circuitos menos dispendiosos, mais seguros, mais sóbrios no que consomem e mais resistentes ao uso. Também, por outro lado, certos progressos de concepção podem trazer economias nos custos ou simplificações na programação, dois objectivos sempre muito importante.

Deste ponto de vista da programação (pois que ainda nos não ocupámos de como são feitos os computadores) façamos umas observações ao anterior. Em primeiro lugar, é patente que a *instrução seguinte* está quase sempre no registo seguinte ao da *instrução presente*, pelo que ocorre arranjar as coisas por forma a só escrever o seu endereço, durante a programação, quando não for assim. O computador é uma máquina onde se *realizam* convenções; pode estar de tal modo construído que, cumprida uma instrução, procure a nova instrução no registo seguinte — salvo quando seja explìcitamente instruído a fazer outra coisa. Nestas condições cada instrução poderá dispensar os últimos três dígitos do registo, utilizando só 10. E, como 10 dígitos dão uma precisão suficiente, faz-se uma grande economia reduzindo o tamanho da palavra a 10. Assim na sua segunda versão o computador ABCD, será um computador ABC.

A única instrução que precisa ser alterada é a transferência condicional

5ABCD

que passará a ser

5ABC

com a seguinte acção: quando seja $a \geq b$ o contrôle passa a C; quando $a < b$ o contrôle continua em sequência.

Diz-se de um computador assim, que tem o contrôle em sequência.

Todas as vezes que se tiver que dar um salto incondicional usa-se mais uma instrução com perda de espaço e tempo, mas na grande maioria dos passos de cálculo poupa-se material. Quanto ao tempo, depende do tipo de memória do computador porque nem todas as memórias são adequadas ao contrôle em sequência.

Há uma meia dúzia de anos, o tambor magnético constituía a memória principal de muitos computadores. Assim, por exemplo, a memória principal da ZEBRA, do equipamento LNEC de 1959 a 1963, é constituída por um tambor magnético cilíndrico, rodando à considerável velocidade de 100 rps por forma a fazer passar ràpidamente as suas 256 pistas em frente de outras tantas cabeças de leitura. Cada pista tem assim em série 32 memórias numeradas seguidamente.

Se o computador ABC tiver um tambor com estas características, cada volta dura 10 milisegundos e só 10 milisegundos depois de lida completamente uma instrução pode começar a ser lida a instrução de sequência (pensemos que a interpretação e execução consomem tempo). Os tempos de interpretação e execução de uma ordem sendo assás variáveis na escala dos milisegundos, poderá contar-se, em média, com 5 milisegundos de espera pelo registo seguinte na cabeça de leitura, o que não é insignificante em face dos 312 microsegundos que leva a ser lida uma palavra.

Como, por outro lado, a execução envolve em geral dados inscritos noutras memórias, entende-se que numa máquina de tambor magnético a programação em sequência mantenha inactivas as cabeças de leitura numa parte considerável do tempo. Esta perda de tempo é agravada, *relativamente*, pela circunstância de ser motivada pelas características do *movimento* do tambor; as velocidades *muito maiores* dos processos electrónicos acomodam-se mal com a existência de elementos móveis, dos quais exigem performances extraordinárias que custam caro.

As máquinas de tambor magnético têm uma programação chamada *óptima* que não é sequencial. Nela se leva em linha de conta os tempos decorridos antes de se fixar o endereço da memória onde deve estar, oportunamente, o dado ou a instrução de que então se precise.

O contrôle em sequência que estamos a imaginar para o computador ABC seria pouco eficiente numa máquina de tambor, pelo que vamos

supor que ele tem uma memória de núcleos magnéticos em que todos os registos, que se atingem no mesmo tempo, são igualmente acessíveis. Esse tempo é no National-Elliott 803, por exemplo, de 288 microsegundos, o que corresponde a economia apreciável no tempo de espera, ou a programações mais simples, como se queira.

Imaginamos assim transformado o computador ABCD, que era uma máquina com palavras de 13 dígitos e instruções de 3 + 1 endereços, no computador ABC, que é uma máquina com palavras de 10 dígitos e instruções de 3 endereços. Ambas as máquinas têm 1000 memórias. A primeira, num tambor magnético; a segunda, em núcleos magnéticos. Vamos também supor modificado o computador por forma a aumentar o número de instruções ao seu código, facilitando a programação e a economia de espaço na memória. Teremos, naturalmente, de aumentar e complicar os circuitos de análise e execução, e portanto, de encarecer o computador; este agravamento de preço será o custo de uma maior eficácia, num sentido muito geral em que se considere a facilidade de programação e o tamanho dos cálculos. Haverá ainda que ter em conta os tempos, que podem diminuir pelos progressos tecnológicos mas aumentar com a simplificação do código; sem esquecer que os tempos de programação também pesam.

A introdução das novas instruções vai ser estudada a propósito da programação do cálculo de polinómios.

APROXIMAÇÃO POR POLINÓMIOS. O cálculo de funções de uma variável utiliza geralmente, de uma maneira ou outra, a substituição por um polinómio que difere da função, para os mesmos argumentos, de quantidades que se desprezam. Quando sejam dados os valores da função e suas derivadas na origem, a fórmula de Maclaurin

$$f(x) = f(O) + \frac{f'(O)}{1!}x +$$

$$+ \frac{f''(O)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(O)}{n!}x^n + R_n$$

permite pôr

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

quando, para os valores que interessam seja desprezível o resto R_n. É então

$$a_k = \frac{f^{(k)}(O)}{k!}$$

Outros polinómios que aproximam convenientemente funções são os *polinómios interpoladores* que se fazem coincidir com ela em vários pontos, quando a função seja assim dada. Podem obter-se a partir das tabelas de diferenças da função, por várias fórmulas ou pela combinação linear de polinómios de várias famílias; a fórmula de Maclaurin descreve-se desta posição como uma combinação dos polinómios de base

$$1 \quad x \quad x^2 \ldots x^n$$

aproveitando a informação sobre o comportamento profundo da função na origem fornecido pelas derivadas.

Da mesma maneira, a fórmula de Lagrange pode dizer-se que dá o polinómio que toma valores dados em certos pontos como combinação linear dos polinómios que se anulam em todos excepto num (onde tomam o valor 1).

Uma família de polinómios convenientes para este fim, quando só interessem valores do intervalo (0,1), é a dos polinómios de Tchebychef (T_n). Na Figura 6 tem-se os coeficientes de alguns polinómios, supostos ordenados por potências decrescentes, em face dos respectivos graus n.

n							
0	1						
1	2	−1					
2	8	−8	1				
3	32	−48	18	−1			
4	128	−256	160	−32	1		
5	512	−1280	1120	−400	50	−1	
6	2048	−6144	6912	−3584	840	−72	1

Fig. 6 — Coeficientes dos polinómios T_n

Os polinómios de Tchebychef podem obter-se das fórmulas

$$T_n(x) = \cos n\theta \qquad \cos\theta = 2x - 1$$

onde se vê que tem de ser $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Exercício 5. Verificar, partindo destas relações, quatro linhas do quadro anterior.

CÁLCULO DE POLINÓMIOS. A programação do cálculo de polinómios pode fazer-se com variados objectivos, como se poderá fazer ideia das situações que se distinguem a seguir.

I — Polinómio do 4.º grau dado. Valores dados do argumento devendo ser lidos quando precisos. Impressão imediata dos resultados.

II — O mesmo, com leitura inicial de todos os valores do argumento e escrita, no fim de todos os valores calculados.

III — O mesmo, com os valores do argumento em progressão. Por exemplo,

$$x = 0{,}00\,;\ (0{,}01)\,;\ 1{,}00$$

IV — Polinómio, cujo grau (não superior a 10) será dado com os coeficientes. Valores do argumento (em progressão aritmética) a serem dados). Leitura e escrita na ocasião.

V — Polinómio do 4.º grau dado. Valores do parâmetro, calculados num programa principal, em número dado.

VI — Polinómio de grau não superior a 10 a ser calculado num programa principal. Valor do parâmetro também calculado no programa.

VII — 100 polinómios de grau 10, dados.

O processo de cálculo utilizado é o *processo das cascas* que se funda na identidade

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$= (((a_0 x + a_1) x + a_2) x + \ldots) x + a_n$$

onde se reconhece um ciclo de operações, como convém. Seja P o endereço da memória onde se quer formar o polinómio; $A_1, \ldots, A_n$, as memórias onde estão os coeficientes, X o endereço de x. Suponhamos que se coloca a_0 em P no início do cálculo. Então as instruções

M)	MUL	P	X	P
S_i)	SOM	P	A_i	P

constituem um ciclo que repetido n vezes, para $i = 1, 2, \ldots n$, nos coloca em P o valor do polinómio.

Observe-se que utilizou uma simbologia (cuja clareza dispensa palavras) para representar a adição e a multiplificação. Este *código mnemónico* do código da máquina tem sobretudo vantagens quando se aumenta o número de instruções e o código da máquina deixa de se reter fàcilmente.

PROGRAMAÇÃO BANAL DO CÁLCULO DE POLINÓMIOS. Seja o cálculo do polinómio

$$P(x) = 128\,x^4 - 256\,x^3 + 160\,x^2 - 32\,x + 1$$

para $x = 0{,}1$.

Leituras. Os coeficientes $a_0, \ldots, a_4$ serão lidos para as memórias 301 a 305 por uma ordem

L1)	LEI	301	305	...

o de x para 201, por

L2)	LEI	201	201	...

e o programa para 101, e seguintes, por uma ordem

L3)	LEI	101	FIMM	...

onde se representa por FIMM o endereço da ordem de paragem que será cumprida quando o cálculo estiver terminado. (Adoptamos a prática de utilizar endereços simbólicos, que nunca serão de três letras para não confundir com os códigos simbólicos de operações, que serão sempre de três letras).

Programa. Vamos começar pelo programa aritmético a partir dos dados

201	301	302	303	304	305
x	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
				501)	

101)	MUL	301	201	501	$a_0 x$
102)	SOM	501	302	501	$a_0 x + x_1$
103)	MUL	501	201	501	$(a_0 x + a_1) x$
104)	SOM	501	303	501	$(a_0 x + a_1) x + a_2$
105)	MUL	501	201	501	...
106)	SOM	501	304	501	...
107)	MUL	501	201	501	...
108)	SOM	501	305	501	P (x)

Escrita e paragem. Fazem-se pelas instruções

109)	IMP	501	501	000
110)	PAR			

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

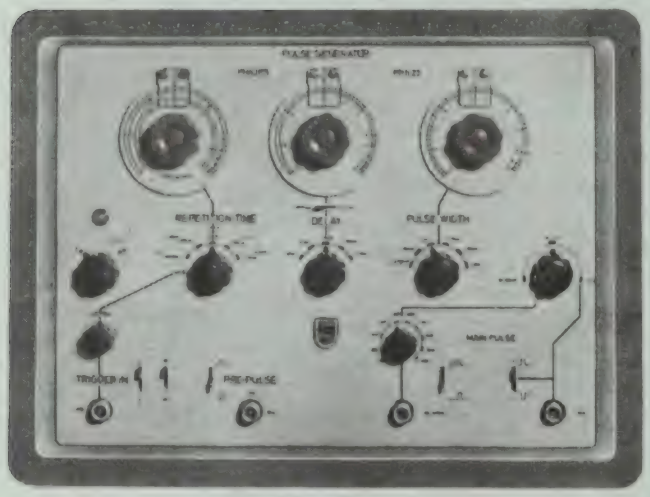
Alverca — Portugal

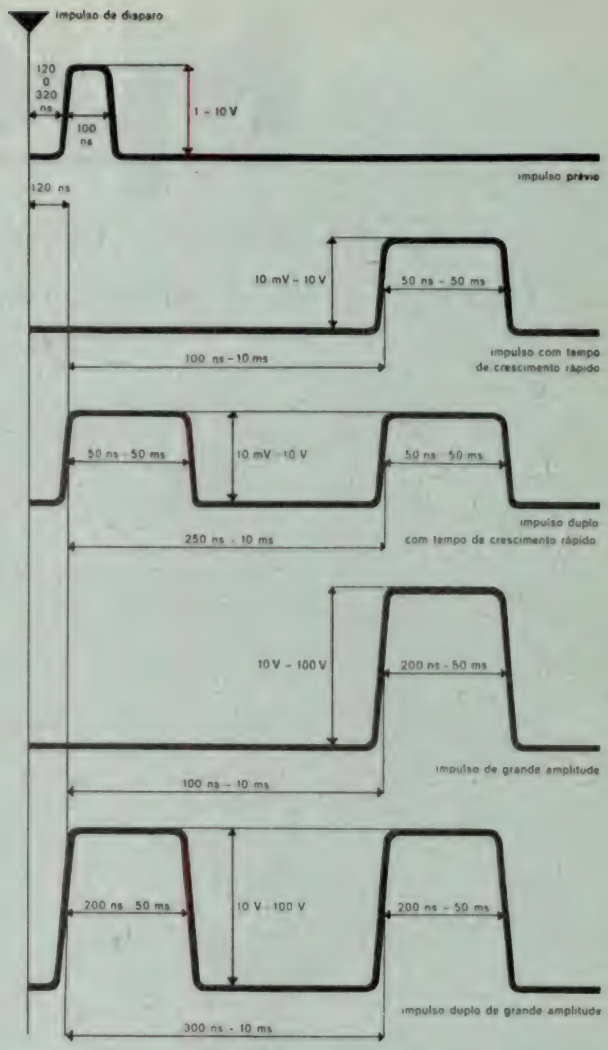
Guindaste eléctrico de 8t/10 m em funcionamento no cais da Companhia Cimento Tejo

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES
GUINDASTES
GRUAS. DERRICKS E GUINCHOS
APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS
CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS

para impulsos com
tempos de crescimento
rápidos e grande amplitude,
simples ou duplos, com
potências de saída até 1,3 Watts.





GERADOR DE IMPULSOS DUPLOS TIPO PP 1122

NOVO

Impulsos com tempos de crescimento rápidos: polaridade positiva ou negativa; amplitude de 10 mV até 10 V; impedância de saída 75 ohms; tempo de crescimento < 20 ns; impulsos simples ou duplos.

Impulsos de grande amplitude: polaridade positiva; amplitude 10 V até 100 V; impedância de saída 75 ohms até 666 ohms, consoante a tensão de saída; tempo de crescimento < 100 ns; impulsos simples ou duplos.

Largura do impulso: ajustável entre 50 ns e 50 ms.

Frequência de repetição dos impulsos: internamente, de 10 c/s a 1 Mc/s; externamente, simples a 2,5 Mc/s.

Impulso prévio: disponível separadamente; largura do impulso 100 ns; tempo de crescimento 20 ns; amplitude 1 V até 10 V; impedância de saída 75 ohms.

Atraso: (do impulso principal ou do segundo impulso num impulso duplo): ajustável entre 100 ns e 10 ms.

PHILIPS
instrumentos electrônicos
de medição

Vendas e assistência técnica em todo o Mundo

Philips Portuguesa S.A.R.L., Rua Joaquim Antonio d'Aguiar 66, LISBOA

Philips, Dept°. EMA, EINDHOVEN, Holanda

Integração, atribuições, perfuração e inscrição. Estando programadas as diversas partes do programa, têm que estas ser reunidas, perfuradas e inscritas na máquina. Distinguimos, para maior clareza, a *leitura* para a memória da máquina, que se faz por uma ordem de leitura do programa *inscrito*, da *incrição* inicial que deve ser feita por ordem externa. Esta ordem é dada, como se viu atrás, compondo no painel um endereço (E) e premindo o botão (L): uma palavra que esteja perfurada em fita à cabeça de leitura da máquina irá ser inscrita na memória que tem aquele endereço. Representá-la-emos por

INSCRICAO E

A inscrição, palavra a palavra, dos dados e do programa é inconveniente e pode ser substituída pela inscrição de um programa de leitura, seguida de execução desse programa. Suponhamos que o programa de leitura *deva* ocupar as memórias de PRIL (princípio de leitura) a FIML (fim de leitura). A *ordem de leitura*

L) LEI PRIL FIML . . .

inscrita por

INSCRICAO L

promoverá a leitura *do programa de leitura*, perfurado e posto ao leitor, quando a máquina fizer a execução de L). A execução de uma ordem, sem ser em curso de programa, também se faz pela ordem exterior dada no painel que indicaremos com

EXECUCAO L

Neste caso o programa de leitura (onde começaremos a fazer as atribuições dos endereços efectivos) será

11)	LEI	301	305
12)	LEI	201	201
13)	LEI	101	110

e a ordem de leitura daquele programa

1)	LEI	011	013

com a ordem exterior de inscrição

INSCRICAO 1

Finalmente a fita perfurada terá

LEI	011	013	
LEI	301	305	
LEI	201	201	
LEI	101	110	
PAR			
a_0; a_1;	a_2;	a_3;	a_4;
	x		
MUL	301	201	501
SOM	501	302	501
. . .			
IMP	501	501	
PAR			

e a inscrição será feita por

INSCRICAO 1
EXECUCAO 1
EXECUCAO 11

O cálculo, quando o quisermos efectuar, será comandada por

EXECUCAO 101

PROGRAMAÇÃO DO CÁLCULO DE POLINÓMIOS USANDO CICLOS. Trata-se de reduzir o programa às instruções

MUL	501	201	501
SOM	501	(a_i)	501

repetidas as vezes necessárias.

Uma rotina de cálculo aritmético é sempre constituída por *uma sucessão* de instruções a cumprir. Queremos assim aludir ao procedimento do calculador humano que faz cada coisa (sempre bem definida) por sua vez, seguindo de um princípio a um fim. O mesmo acontece com os computadores aritméticos. A *diversidade de movimentos* que um e outro fazem no decurso de um cálculo é, também, limitada.

Por isto um programa pode ser representado pela *relação rectilínea* dos seus passos, e o próprio programa constituído pela lista das instruções que vai cumprir em sequência. As instruções em tais programas não podem, naturalmente, ser mais numerosas que as memórias da máquina. Numa máquina de 1000 memórias, quando cada instrução levasse em média 1 milisegundo a cumprir-se, um programa *rectilíneo* duraria menos de 1 segundo.

A possibilidade de programas mais longos reside na existência de troços que se repetem no programa rectilíneo, com modificações que podem automatizar-se fàcilmente. Durante o cálculo a máquina, convenientemente programada, executa repetidamente os *ciclos* de operações, comandados por uma zona fixa da memória, que correspondem aos troços repetidos do programa rectilíneo. Um programa com ciclos programados representar-se-á com o auxílio de anéis que simbolizam os ciclos. Um ciclo de instruções num programa é pois uma sucessão de instruções cujo cumprimento o computador repete.

A programação de um ciclo ocupa-se geralmente das seguintes partes: *preparação, cálculo, decisão* e *modificação*. Na determinação do valor do polinómio, o *cálculo* é a multiplicação por x seguida da adição de a_i, que representámos simbòlicamente por

M)	MUL	P	X	P
S_i)	SOM	P	A_i	P

onde P representa a memória de cálculo onde acabará por inscrever-se o valor do polinómio, X a memória onde está x e A_i a memória onde se tem o coeficiente que intervém no momento. Cada vez que executa as operações de cálculo o computador tem de reconhecer se o valor do polinómio já está obtido (caso em que deve passar a outra parte do programa), ou se deve repetir o cálculo. Chama-se *decisão* a esta parte do ciclo. Quando deva repetir-se o cálculo, algumas instruções deverão ser prèviamente modificadas; é a *modificação*. A preparação de um ciclo é constituída pelas instruções que sejam necessárias para pôr os dados na situação que se supõe no início do ciclo.

Assim, neste caso, a decisão é programada com a instrução de contagem e a de comparação e transferência:

CONT)	SOM	(1)	CONTA	CONTA
COMP)	SAL	(4)	CONTA	FRENTE

A modificação consistirá em substituir na instrução

S_i)	SOM	P	A_i	P

o endereço A_i por A_{i+1}. Será conseguida pela instrução

MODE)	SOM	S_i	(1000)	S_i

Finalmente a preparação será constituída pelas instruções (se forem precisas) que colocam a_0 em P, 0 em CONTA, as constantes 4 e 1000 em memórias convenientes. É evidente que estas inscrições se podem fazer todas por leitura. Todavia a passagem do conteúdo de A_0 para P põe um problema que aparece frequentemente. Uma instrução.

SOM	A_0	(0)	P

coloca em P o conteúdo de A_0 com a dificuldade de utilizar um zero que tem de estar inscrito. Pode haver vantagem de pôr permanentemente em zero o conteúdo de uma das 1000 memórias; a memória 000, por exemplo. Ou, de uma maneira ou outra, criar uma instrução de *limpeza*

LIM	B	C

que anule os conteúdos das memórias B, B + 1, ... C. Ou, ainda, de criar uma instrução de translação

TRA	A	B	C

que transfere os conteúdos das memórias de A a B para C e seguintes.

Vamos supor que se escolheu para o computador ABC a solução que consiste em criar os circuitos para estas duas instruções a que se dão os códigos em linguagem máquina

8	(a)	(b)	(c)
9	...	(b)	(c)

Exercício 6. Escrever em linguagem máquina um programa compacto para o cálculo e perfuração do valor de um polinómio de 4.º grau, de que são dados *inicialmente* os coeficientes, para um valor do argumento, dado também inicialmente.

Exercício 7. Escrever em linguagem máquina um programa compacto para o cálculo e perfuração do valor de um polinómio de grau que não excede 10 para um valor de x que será dado, juntamente com os coeficientes, em tempo oportuno.

SUMÁRIO

Este artigo é uma versão simplificada, para fins pedagógicos, do que seria um curso de programação de um computador real. Aproveita-se a oportunidade para esclarecer algumas das mais importantes questões postas por quem se aproxima de um grande computador.

SUMMARY

This is an introductory paper about the main points of the big electronic computers. The author has two ains : to be as simple as possible and to answer as many of the fundamental questions as possible.

C. D. U. 621.311.5/94

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

JANEIRO

I — Breve nota mensal

No aspecto hidrológico, o mês de Janeiro apresentou-se, no conjunto, muito abaixo da média.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1962	1963	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	375,9	404,5	+ 8
Produção térmica (P_t)	5,8	9,2	+ 59
Produção total (P_T)	381,7	413,7	+ 8
Exportações (Ex)	16,8	1,2	— 93
Importações (I)	0,0	0,0	0
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	59,6	79,0	+ 33
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	305,3	333,5	+ 9,2 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	1.59	0,76	—

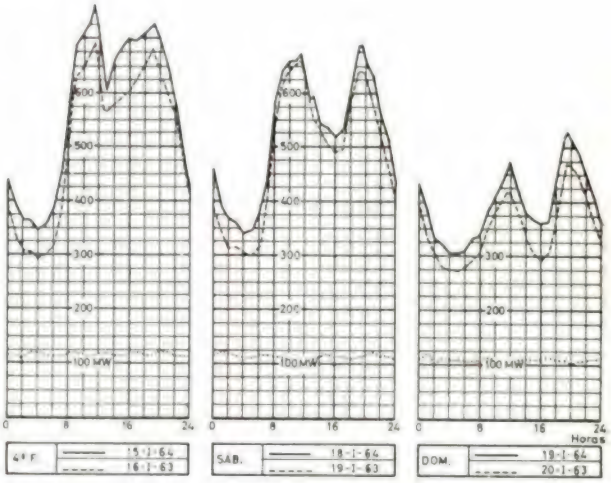
NOTAS:

(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + 1 - Ex$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 11,8 % e — %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1963	4.ª feira: 1964
Produção hidráulica		(P_h) MWh	12503	14123
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	12503	14123
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	0
	Import.	(I) MWh	0	0
TOTAL		$P_T + (I-Ex)$ MWh	12503	14123
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	10610	11474
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	1893	2649
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	692	761
		Potência mín. MW	292	348
		Utiliz. da ponta horas	18,1	18,6
		Factor de carga	0,75	0,77
	P_{cp}	Potência máx. MW	617	643
		Potência mín. MW	208	227
		Utiliz. da ponta horas	17,2	17,8
		Factor de carga	0,72	0,74



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Paradela	221,4	99,5
Venda Nova	124,9	97,6
Salamonde	22,9	83,0
Caniçada	29,0	87,6
Cabril	296,6	87,4
Castelo do Bode	143,6	88,1
Guilhofrei	4,0	48,2
Lagoa Comprida	23,5 (2)	75,9
Santa Luzia	44,7	72,6
Pracana	9,5	73,6
Póvoa	12,7 (3)	97,1
Total . . .	932,8	89,4

Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 1,8 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 1,2 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 2,6 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 2,6 GWh no fim do mês.

SIEMENS
PORTUGAL
MOTORES
MOTRA
SABUGO - PORTUGAL
FABRICADOS SOB LICENÇA DE
SIEMENS-SCHUCKERTWERKE AG
BERLIN-ERLANGEN
DISTRIBUIDORES
SIEMENS COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, SARL.
LISBOA • PORTO

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS

SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FELTROS, FILTROS E TECIDOS INDUSTRIAIS PARA TODOS OS FINS:

EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS,
DE QUALQUER FIBRA

PASTA PARA PAPEL
PAPEL
FIBROCIMENTO
CURTUMES
FIAÇÕES DE ALGODÃO
LINHAS
INDÚSTRIAS QUÍMICAS

TECELAGENS
ACABAMENTOS
TINTURARIAS
LAVANDARIAS
ESTAMPARIAS
FILTROS
DESPOEIRAGEM

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias, Paredes húmidas, Coberturas, Fendas, Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

C. D. U. 517.514.2 : 536.7

PROBLEMA DE EXTREMOS

POR ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

(Conclusão)

Generalização ao espaço R_n

0) O objectivo deste capítulo consiste em generalizar os tratamentos formais referidos anteriormente a um espaço de n dimensões e ainda sugerir uma solução mecanográfica.

O problema central reside no tratamento dos termos negativos de expoentes pares ou termos dispondo de alguns expoentes ímpares e que podem ser tornados negativos e determinar se esses termos podem ou não, em determinadas condições, ser maiores do que os restantes termos positivos pares ou termos de expoente ímpar que são positivos quando o termo ímpar é negativo.

Resolvido este problema central para cada um dos termos negativos de expoente par ou termos de expoente ímpar que podem ser tornados negativos, verificado que tal situação não ocorre então poderá afirmar-se que, no ponto considerado, a função tem um extremo (mínimo).

O mesmo procedimento poderá empregar-se quando o extremo é um máximo, mas então deverá testar-se a negatividade da série.

O método envolve tomar-se as derivadas até uma certa ordem; em física, interessa, quanto muito, estudar a série até à 6.ª ordem, pois não tem sentido físico, em geral, um extremo que se decide para além da 6.ª ordem.

Formalmente o método é válido para qualquer ordem.

1) *Problema central*

Sendo dados: um termo $M_o \rightarrow M_o\, h_1^{a_{o1}} \dots h_n^{a_{on}}$

e

m termos $M_i \rightarrow M_i\, h_1^{a_{i1}} \dots h_n^{a_{in}}$

Determinar quais as condições em que:

$$\left| M_o\, h_1^{a_{o1}} \dots h_n^{a_{on}} \right| > \sum_{i=1}^{m} \left| M_i\, h_1^{a_{i1}} \dots h_n^{a_{in}} \right| \qquad (1)$$

sabendo que:

2) $\begin{cases} M_o \text{ e } M_i \text{ são números finitos.} \\ a_{oj} \text{ e } a_{ij} \text{ são números inteiros finitos e positivos.} \\ i = (1, 2 \dots m) \\ j = (1, 2 \dots n) \end{cases}$

3) $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ se pode fazer tão pequeno quanto se desejar.

Para encontrar as condições acima referidas, proceder-se-á à resolução de dois problemas.

1.1) Estabelecer as condições necessárias e suficientes para que se verifique simultâneamente as m seguintes desigualdades:

4) $$\left| M_o\, h_1^{a_{o1}} \dots h_n^{a_{on}} \right| > \left| M_i\, h_1^{a_{i1}} \dots h_n^{a_{in}} \right|$$

e ainda 2) e 3).

1.2) Provado que os sistemas 2), 3) e 4) são satisfeitos, propor em que condições a desigualdade (1) também é satisfeita.

2) *Teorema I – A*

Para que o sistema de m inequações seguintes seja satisfeito, quando $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ suficientemente pequeno,

$$\left| M_o \, h_1^{a_{o1}} \ldots\ldots h_n^{a_{on}} \right| > \left| M_i \, h_1^{a_{i1}} \ldots\ldots h_n^{a_{in}} \right| \tag{5}$$

Será necessário e suficiente que:

$$[\alpha_{ij}] \, . \, [x_j] < [A_i] \tag{6}$$

para $x_j > |N|$ e $|N|$ suficientemente grande.

Sendo:

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_{ij} = (a_{oj} - a_{ij}) \quad \text{donde} \quad (\alpha_{ij} \text{ ser um número inteiro}) \\ |h_j| = |q|^{x_j} \\ 0 \leqslant |h_j| < |q| < 1 \quad \text{donde} \quad x_j > 1 \\ A_i = \text{Ln} \left| \dfrac{M_i}{M_o} \right| . \, (\text{Ln} \, |q|)^{-1} \\ \text{e ainda } 2) \text{ e } 3) \end{cases}$$

* * *

Com efeito:

Substituindo em 5) $|h_j|$ por $|q|^{x_j}$ teremos:

$$\begin{cases} |M_o| \, . \, |q|^{\sum_j a_{oj} x_j} > |M_i| \, . \, |q|^{\sum_j a_{ij} x_j} \qquad i = 1 \ldots\ldots m \\ \text{e} \quad x_j > |N| \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \sum_j (a_{oj} - a_{ij}) \, x_j < \text{Ln} \left| \dfrac{M_i}{M_o} \right| . \, (\text{Ln} \, |q|)^{-1} \qquad i = 1 \ldots . m \\ \text{e} \quad x_j > |N| \end{cases}$$

Note-se que $|q| < 1$ donde $\text{Ln} \, |q| < 0$

ou substituindo por α_{ij} e A_i, teremos finalmente

$$\begin{cases} \sum_j \alpha_{ij} x_j < A_i \\ \text{e} \\ x_j > |N| \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \underset{(m,n)}{[\alpha_{ij}]} \; \underset{(n,1)}{[x_j]} < \underset{(m,1)}{[A_i]} \\ \text{e} \\ x_j > |N| \end{cases} \tag{8}$$

3) *Discussão de desigualdade* $\begin{cases} [\alpha_{ij}] \, . \, [k_j] < [A_i] \, . \\ x_j < |N| \end{cases}$

Para o efeito, examinemos todos os menore $[\beta_{k,l}]$ da matriz rectangular $[\alpha_{ij}]$, onde k representa p linhas e l p colunas $\left(\text{com } p < \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right. \right)$ extraídas da matriz $[\alpha_{ij}]$.

Vamos designar por $[\beta_{k,l}]$ qualquer dos $\binom{j}{p}$ menores distintos que podem ser formados conservando p linhas bem determinadas e combinando as j colunas p a p.

Vamos admitir que (9) det $[\beta_{k,l}] = 0$ para todos os $\binom{j}{p}$ menores distintos formados.

Então, é porque existe uma ou mais linhas que são combinações lineares das restantes.

Mas se det $[\beta_{kl}] = 0$ para as p linhas consideradas, então existe um vecto $[\gamma_k]$ tal que:

$$[\gamma_k]\,[\alpha_{k,j}] = [0] \qquad \text{para as p linha referidas.} \tag{10}$$

Sendo γ_k números finitos.

Vamos impor ainda que $\gamma_k \neq 0$ $k = 1 \ldots . p$, isto é, só existe uma combinação linear.

No casa de existir mais do que uma combinação linear, tratar-se-á separadamente cada combinação.

Seja q uma qualquer das linhas que entra na combinação linear; então:

$$-\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{k,j}] = [\underset{q}{\alpha}, j] \qquad \text{para } k \neq p \tag{11}$$

e designando por $[\underset{q}{\alpha}, j]$ o vector dos coeficientes da de inequação q ou seja da linha q da matriz $[\alpha_{ij}]$.

Mas, dum modo geral, $[\alpha_{k,j}] \,.\, [x_j] < [A_k]$ e portanto também o será para as $(p-1)$ linhas que resultam das p inequações em estudo, suprimindo a linha q.

Donde

$$\underset{(1,p-1)}{\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right]} \cdot \underset{(p-1,n)}{[\alpha_{k,j}]} \cdot \underset{(n,1)}{[x_j]} \;\; \text{e} \overset{<}{\underset{>}{\text{ou}}} \;\; \underset{(1,p-1)}{\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right]} \cdot \underset{(p-1,1)}{[A_k]} \qquad \text{e } k \neq q \tag{12}$$

Quanto ao símbolo da desigualdade as seguintes hipóteses podem ser consideradas:

a) $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} > 0$ para todos os $(p-1)$ γ_k.

Então a desigualdade (12) toma a forma:

$$\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{k,j}] \,.\, [x_j] < \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] [A_k] \qquad \text{e } k \neq q \tag{13}$$

mas, por outro lado, será, para a inequação q:

$$[\underset{q}{\alpha_j}] \,.\, [x_j] < A_q \tag{14}$$

e conjugando (13), (14) e (11) obteremos:

$$A_q > [\underset{q}{\alpha_j}] \,.\, [x_j] > -\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \qquad k \neq q \tag{15}$$

ora a desigualdade (15) é verdadeira para qualquer q, e portanto para todas as inequações que fazem parte das p inequações onde se reconheceu existir $\binom{j}{p}$ menores $[\beta_{k,l}]$ cujos determinantes são nulos.

Como A_q e $\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k]$ são constituídos por elementos finitos e fazendo $x^j = \gamma_j \cdot x_o$

onde $\begin{cases} x_o, x_j > 0 \\ \text{e} \\ \gamma_j << \infty \end{cases}$ e x_o se pode fazer tão grande quanto se desejar, poderá (15) escrever-se

$$\frac{A_q}{x_o} > [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [\gamma_j] > - \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \cdot \frac{1}{x_o} \tag{16}$$

e para $x_o > |N|$ e N suficientemente grande será

$$\left| \frac{A_q}{x_o} \right| , \left| - \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \right| < |\delta| \quad \text{e} \; |\delta|$$

tão pequeno quanto se desejar.

Donde resulta que $|[\underset{q}{\alpha} j] \cdot [x_j]| < |\delta|$ (17)

que define um hiperplano que designaremos de *hiperplano de degenerescência* cuja expressão formal é

$$[\underset{q}{\alpha} j] \cdot [x_j] = 0 \tag{18}$$

haverá tantos hiperplanos quantas inequações interventoras na degenerescência ou seja p.

A expressão (17) mostra que o módulo de $[\underset{q}{\alpha} j] \cdot [\gamma_j]$ está limitado por $|\delta|$ o qual pode ser tão pequeno quanto se desejar; bastava para tanto escolher $|N|$ suficientemente grande.

Da expressão (15) pode ainda concluir-se que

$$0 < - [\underset{q}{\alpha} j] \cdot [x_j] + A_q < \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot \left[A_q\right] + A_q \tag{15 a}$$

b) $\frac{\gamma_k}{\gamma_q} < 0$ para todos os $(p-1)$ γ_k. e para um certo γ_q.

Então a desigualdade (12) toma a forma

$$\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{kj}] \cdot [x_j] > \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_q] \tag{19}$$

e é fàcilmente deduzível que:

$$\begin{cases} A_q > \left[\underset{q}{\alpha_j}\right] \cdot [x_j] \\ -\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] > \left[\underset{q}{\alpha_j}\right] \cdot [x_j] \end{cases} \tag{20}$$

Neste caso $[\underset{q}{\alpha_j}]$ não está limitado em *módulo* mas apenas em ordem. Com efeito, a 2.ª inequação do sistema (20) veio, quanto muito, reduzir o espaço de existência de $[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j]$.

Note-se que esta conclusão é verdadeira apenas para a inequação q; para as restantes veja-se a hipótese c) tratada a seguir.

c) $\frac{\gamma_k}{\gamma_q} \lesseqgtr 0$ conforme o valor de k e q escolhidos.

Vamos designar por $\frac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}$ e $\frac{\gamma_{k''}}{\gamma_q}$, respectivamente as fracções que são > 0 ou < 0.

Assim $\frac{\gamma_{k'}}{x_q} > 0$ donde $\left[\frac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}\right] [\alpha_{k'j}]\ [x_j] < \left[\frac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}\right] [A_{k'}]$

e $\frac{\gamma_{k''}}{\gamma_q} < 0$ donde $\left[\frac{\gamma_{k''}}{q}\right] . [\alpha_{k'j}] . [x_j] > \left[\frac{\gamma_{k''}}{\gamma_q}\right] . [A_{k''}]$

e $\frac{\gamma_q}{\gamma_q} = 1 > 0$ donde $\underset{q}{[\alpha_j]}\ [x_j] < A_q$

Nesta hipótese haverá desigualdades num sentido e outras noutro, mas em conjunto o sistema não impõe condições da forma $|\ [\alpha_j]\ [x_j]\ | < |\ \delta\ |$ a nenhuma das linhas (inequações) do sistema.

Teorema II A

Se (21) $\left|\ M_o\ h_1^{a_{o1}} \ldots . h_n^{a_{on}}\ \right| > \left|\ M_i\ h_1^{a_{i1}} \ldots . h_n^{a_{in}}\ \right|$ $i = 1, \ldots . m,$

então (22) $\left|\ M_o\ h_1^{a_{o1}} \ldots . h_n^{a_{on}}\ \right| > \left|\ \sum_{i=1}^{m} M_i\ h_1^{a_{i1}} \ldots . h_n^{a_{in}}\ \right|$

excepto se na matriz $[a_{ij} - a_{oi}] = [\alpha_{ij}]$ existirem algumas linhas para as quais se verifique a igualdade $[\gamma_k] . [a_{ij} - a_{oj}] = [0]$ e os γ_k todos do mesmo sinal, porque então a desigualdade (21) pode não ser suficiente para permitir concluir (22).

As letras indiciadas têm o mesmo sentido e significado já definido no Teorema I A.

Com efeito:

A desigualdade (21) pode escrever-se

(23) $1 > |\ q\ |^{-\underset{i}{[\alpha_j]} . [x_j] + A_i}$

Ora já vimos que $\begin{cases} \underset{i}{[\alpha_j]} . [x_j] < A_i & i = 1, \ldots . m \\ x_j > |\ N\ | \text{ e } |\ N\ | \text{ suficientemente grande} \end{cases}$

ou seja $-\underset{i}{[\alpha_j]} . [x_j] + A_i > 0$

Em geral, $-[\alpha_j] . [x_j] + A_i$ não é limitado superiormente e poderá fazer-se:

(24) $-[\alpha_j] . [x_j] + A_i = |\ P_i\ | > 0$

e (25) $|\ P_i\ | = \text{Ln}\ \rho_i . (\text{Ln}\ |\ q\ |)^{-1}$ e $\rho_i < 1$

e substituindo em (23) teremos:

$1 > |\ q\ |^{\text{Ln}\ \rho_i\ (\text{Ln}\ |\ q\ |)^{-1}}$

note-se que:

$\begin{cases} \text{Ln}\ \rho_i < 0 \\ \text{Ln}\ |\ q\ | < 0 \end{cases}$

Somando as m desigualdades (23) obteremos:

$$m > \sum_{i=1}^{m} |\ q\ |^{-\underset{i}{[\alpha_j]} . [x_j] + A_i}$$

$$\text{ou (26)} \quad 1 > \sum_{i=1}^{m} |\ q\ |^{\text{Ln}\ \rho_i\ (\text{Ln}\ |\ q\ |)^{-1}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_i$$

Se impusermos $\rho_i < 1$ será $\sum_{i=1} \rho_i < m$ onde $1 > \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=} \rho_i$

Ora a desigualdade (22) pode tomar a forma:

$$1 > \sum_{i=}^{m} q \,|^{-[\alpha_j] \cdot [x_j] + A_i} \tag{27}$$

e esta desigualdade é sempre satisfeita se $\rho_i < 1$ q. e. d.

Tratemos agora a *excepção* referida no Teorema II A.

A demonstração foi possível porque admitimos que era, em geral, satisfeita desigualdade (24).

Porém se entre algumas desigualdades do sistema se verificar que: $[\gamma_k]\,[\alpha_{ij}] = [0]$ e γ_k todos do mesmo sinal, já vimos em (15) e 15 a) que $0 < -[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] + A_q < \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_q] + A_q$ e portanto $-[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] + A_q$ está limitado superiormente e daí pode a desigualdade (24) não ser satisfeita.

5) *Estado do caso degenerado*

O caso degenerado verifica-se quando entre um certo número de inequações existe para as correspondentes linhas de Matriz $[\alpha_{ij}]$, relações lineares entre os seus elementos.

Sejam as inequações $i = 1, \ldots p$, e $(p < n, m)$ aquela para as quais se verifica

$$[\gamma_k]\,[\alpha_{k,j}] = [0] \quad e \quad k = 1, \ldots p$$

e além disso γ_k ou $(\gamma_k - 0)$ para todos os kk, já vimos em (17) que

$$|\,[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j]\,| < |\,\delta\,| \tag{17}$$

e por mais pequeno que seja $|\,\delta\,|$ haverá sempre um $|\,N\,|$ tal que para $x_j > |\,N\,|$ a inequação 17) é sempre satisfeita. E tal é verdade para todos os q desde 1 a p.

Também já vimos que a desigualdade (22) aplicada aos p termos se pode escrever: (Veja-se 27)).

$$(28) \qquad 1 > \sum_{k=1}^{p} |\,q\,|^{-[\underset{k}{\alpha_j}]\,[x_i] + A_k}$$

ou

$$1 > \sum_{k=1}^{p} |\,q\,|^{-[\underset{k}{\alpha_j}]\,[k_j]} \cdot \left|\frac{M_k}{M_o}\right|$$

Ora para $x_j > |\,N\,|$ e $|\,N\,|$ suficientemente grande $|-[\underset{k}{\alpha_i}] \cdot [x_j]\,| < |\,\delta\,|$ e $|\,\delta\,|$ tão pequeno quanto se desejar donde

$$(29) \qquad \left|\,|\,q\,|^{-[\underset{k}{\alpha_j}]\,[x_j]} - 1\,\right| < \left|\,\delta_1\,\right|$$

e $|\,\delta_1\,|$ tão pequeno quanto se desejar e finalmente

$$(30) \qquad \left|\sum_{k=1}^{p} |\,q\,|^{-[\underset{k}{\alpha_j}] \cdot [x_j]} \left|\frac{M_k}{M_o}\right| - \sum_{k=1}^{p} \left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right| < \left|\,\delta_2\,\right|$$

e $|\,\delta_2\,|$ tão pequeno quanto se desejar.

O problema fica reduzido a verificar a desigualdade numérica:

$$1 > \sum_{k=1}^{p} \frac{M_k}{M_o} \tag{31}$$

6) Antes de prosseguir, convém demonstrar que $\sum_{k=1}^{p} \frac{M_k}{M_o}$ é o mínimo de função (32)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} |q|^{-[\alpha_j]_k [x_o] + A_k} \text{ quando } \begin{cases} \left| -[\alpha_j]_k . [x_j] \right| \to 0 \text{ e ainda } \sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} \left| \frac{M_k}{M_o} \right| = 0 \\ \text{e } x_j \to \infty \end{cases}$$

Com efeito,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} |q|^{-[\alpha_j]_k . [x_j]} . \frac{M_k}{M_o} \tag{33}$$

A condição *necessária* ou de estacionaridade de φ é: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \ldots. n$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} - \alpha_j . \left| \frac{M_k}{M_o} \right| . |q|^{[\alpha_j]_k . [x_j]} = 0 \tag{34}$$

para $j = 1, \ldots. n$

mas já vimos em (29) que para $x_j > |A|$ e $|A|$ suficientemente grande será:

$\left| |q|^{-[\alpha_j]_k . [x_j]} - 1 \right| < |\delta_1|$ e $|\delta_1|$ tão pequeno quanto se desejar e daqui

$$\left| \left| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_o} \right| . |q|^{-[\alpha_j]_k . [x_j]} \right| - \left| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_o} \right| \right| \right| < |\delta_3| \tag{35}$$

e $|\delta_3|$ tão pequeno quanto se desejar

donde

$$\left| - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{MK}{M_o} \right| \right| < |\delta_4| \tag{36}$$

e $\delta_4 |$ tão pequeno quanto se desejar ou no limite $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} \left| \frac{M_k}{M_o} \right| = 0$ (37)

que estabelece uma relação a verificar em cada caso.

Falta mostrar que se a condição necessária for verificada, também o será a condição *suficiente* ou de extremo.

Com efeito:

A condição suficiente propõe-se deste modo

$$\Delta^2 \varphi = [d x_j]^t . \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \, \partial x_j} \right] . [d x_j] > 0 \tag{38}$$

mas

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \, \partial x_j} = \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{p} - \alpha_{j_k} . \left| \frac{M_k}{M_o} \right| . |q|^{-[\alpha_j]_k . [x_j]} \right)}{\partial x_l}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} . \alpha_{j_k} . \left| \frac{M_k}{M_o} \right| . |q|^{-[\alpha_j]_k [x_j]} \tag{39}$$

e novamente será:

(40) $$\left| \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_o} \right| . |q|^{-[\alpha_j]_k . [x_j]} \right| - \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_k} \right| \right| \right| < |\delta_5|$$

e $|\delta_5|$ pode ser feito tão pequeno quanto se desejar, fazendo $x_j > |N|$ e $|N|$ tão grande quanto o necessário.

mas (41) $$\left[\sum_{k=1}^{p} \underset{k}{\alpha_l} \cdot \underset{k}{\alpha_j} \cdot \left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right] = \underset{(n,p)}{\left[\underset{k}{\alpha_j}\right]^t} \cdot \underset{(p,p)}{\left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right]} \cdot \underset{(p\,n)}{\left[\underset{k}{\alpha_j}\right]}$$

$$(n, n)$$

Sendo $\left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right]$ uma matriz diagonal e tendo em vista (41), (40) e (38) poder-se-á concluir que:

$$\left|\left|[dx_j]^t \cdot \left[\frac{\alpha^2 \varphi}{\partial x_l\, \partial x_j}\right] \cdot [dx_j]\right| - \left|[dx_j]^b \underset{k}{[\alpha_j]^t} \cdot \left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right] \cdot \underset{k}{[\alpha_j]} \cdot [dx_j]\right|\right| < |\delta_6| \qquad (42)$$

e $|\delta_6|$ poderá ser feito tão pequeno quanto se desejar, fazendo $x_j > |N|$ e $|N|$ tão grande quanto o necessário.

Portanto bastará provar que é maior que zero a expressão abaixo, para provar que $\Delta^2 \varphi > 0$ e portanto que se trata de mínimo

$$(43) \qquad [dx_j]^r \cdot \underset{k}{[\alpha_j]^t} \left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right] \cdot \underset{k}{[\alpha_j]} \cdot [dx_j]$$

designemos por

$$dy_j = \underset{k}{[\alpha_j]} \cdot [dx_j]$$

então (43) poderá escrever-se:

$$(44) \qquad [dy_j]^t \cdot \left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right] \cdot [dy_j]$$

e para provar que (44) é positivo bastará provar que a matriz $\left[\left|\frac{M_k}{M_o}\right|\right]$ é positiva definida.

Ora a matriz referida é *diogonal* e todos os seus elementos são positivos, $\left|\frac{M_k}{M_o}\right| > 0$

q. e. d.

7) Portanto o estudo das p desigualdades nas condições referidas no parágrafo 5 resulta na comparação de $\sum_{k=1}^{k} \frac{M_k}{M_o}$ com a unidade.

45) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_o}\right| > 1$ o sistema não tem um extremo no ponto em estudo

46) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_o}\right| < 1$ então o sistema tem um extremo no ponto

47) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_o}\right| = 1$ então o termo M_o e os termos M_k $(k = 1, - \ldots p)$ têm uma soma algébrica nula

Neste último caso se a função tiver um extremo este não se reconhece até à ordem em que foi feito o desenvolvimento em série de Taylor da função cujo extremo se deseja apurar.

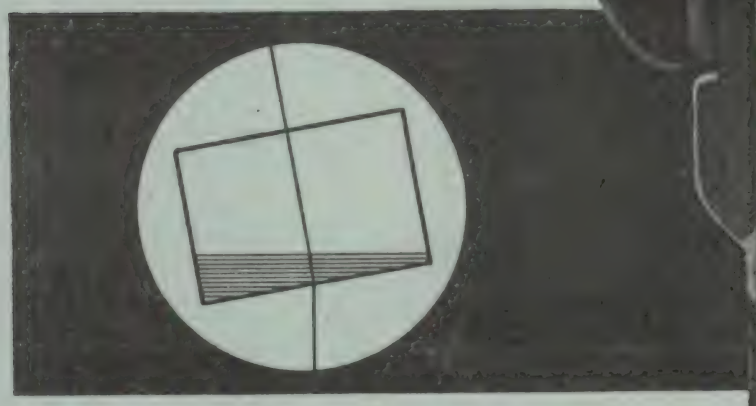
8) Tem interesse aplicar a formulação deduzida ao caso de $\begin{cases} n = 2 \\ m = 2 \\ p = 2 \end{cases}$

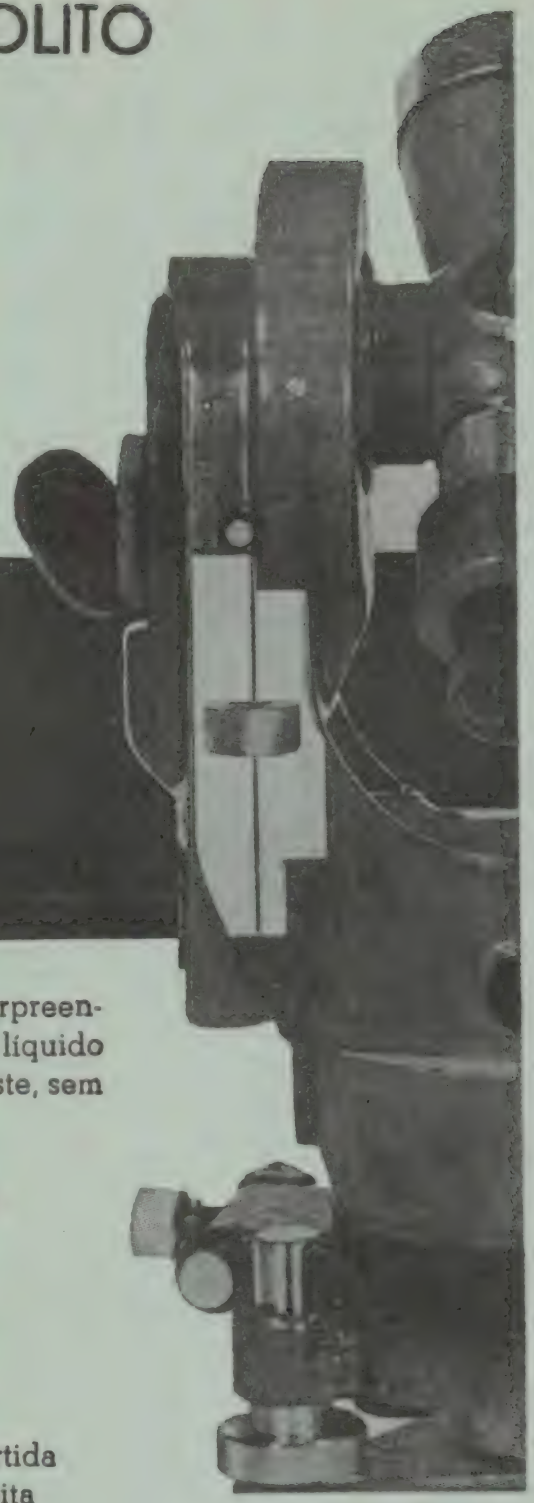
O NOVO TEODOLITO

Wild T 1-A

com calagem
zenital automática

O teodolito com os aperfeiçoamentos mais modernos, permitindo medições mais fáceis, rápidas e mais exactas





Automatismo duma concepção surpreendentemente simples: Prisma com líquido sem partes mecânicas, sem desgaste, sem desarranjos, sem reparações.

Detalhes no prospecto Th 154

WILD
HEERBRUGG

Modelo T 1-A C/imagem invertida
Modelo T 1-A E C/imagem direita

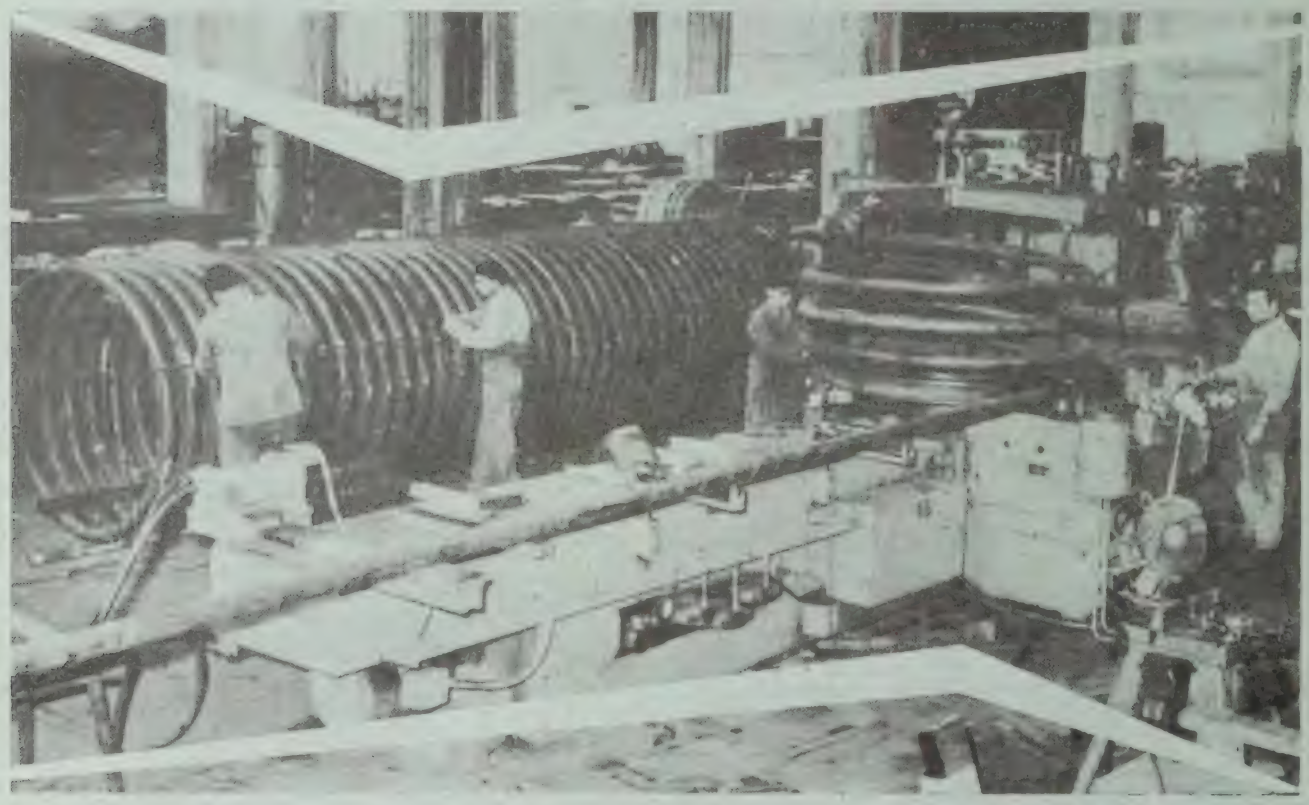
Solicitem catálogo ou demonstração ao representante exclusivo:

WILD PORTUGAL, L.DA

LISBOA — PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8, S/L 6 — Tel. 68 11 27

aços vazados
ferros meehanite
mecânica MÉDIA E PESADA
construções metálicas

COMPORTAS
TURBINAS
CONDUTAS FORÇADAS
RESERVATÓRIOS SOB PRESSÃO
PERMUTADORES DE CALOR



Fabricação de uma serpentina para fornalha * Principais características: tubo de aço Cr-Mo · 3" sch. 80 * Diâmetro da serpentina 1600 mm * Peso aproximado 3500 kg * Desenvolvimento do tubo aproxim. 200 m

DMM

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AVENIDA 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 ✦ TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 ✦ TELEGRAMAS: METALOFABRIL

Para que seja possível existir uma degenerescência é necessário que:

$[\gamma_k]\,[\alpha_{k,j}] = [0]$, Veja-se expressão (10) e $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} > 0$

e como $\begin{cases} [\alpha_{ij}]\,[x_j] < [A_i] & i = 1 \text{ e } 2 \\ x_j > |N| \end{cases}$

será $\begin{cases} \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \dfrac{\alpha}{\beta} < 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} < 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \\ \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \dfrac{\alpha}{\beta} < 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} < 0 \end{cases}$

e a desigualdade $[\alpha_{ij}]\,[x_i] < [A_i]$ pode escrever-se sob a forma:

$$\begin{cases} +\alpha x_1 - \beta x_2 < A'_1 \\ -\alpha x_1 - \beta x_2 < A'_2 \end{cases}$$

A condição de suficiência propõe-se (Veja-se 37)

$$\begin{cases} \alpha_{11}\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \alpha_{21}\left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0 \quad j = 1 \\ \alpha_{22}\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \alpha_{22}\left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0 \quad j = 2 \end{cases}$$

mas $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = g$ e as duas equações degeneram num só $g\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0$ ou simplificando $g\,|M_1| + M_2 = 0$.

A condição de degenerescência estuda-se da comparação com a unidade de

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{M_k}{M_0}\right| = \left|\frac{M_1}{M_0} + \left|\frac{M_2}{M_0}\right| = \frac{|M_1| + |M_2|}{|M_0|} \gtreqless 1$$

Tanto a expressão $|M_1| + |M_2| \gtreqless |M_0|$ como $g\,|M_1| + |M_2| = 0$ coincidem com as soluções estudadas anteriormente como seria de prever.

9) Vamos proceder à generalização de alguns teoremas e lemas já deduzidos para funções de duas variáveis independentes.

Teorema III–A

Designando por (i) qualquer combinação dos n índices $i_1 \ldots i_n$, pode provar-se que:

$$48) \quad \left| M_0 \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{0j}} \right| > \sum_{(i)}^{\infty} \left| M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{(i)j}} \right|$$

Se fôr:

$$\begin{cases} a_{(i)j} \geqslant a_{0j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > \sum_{j=1}^{n} a_{0j} \\ \left.\begin{matrix} a_{(i)j} \\ a_{(0)j} \end{matrix}\right\} \text{inteiros e positivos} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sum_{j=i}^{n} i_j \geqslant 1 \\ |h_j| < |q| < 1 \quad j = 1 \ldots n \\ |h_j| < \delta \text{ e } \delta \text{ tão pequeno quanto se quiser} \end{cases}$$

Demonstração:

A inequação 48) pode escrever-se:

$$49) \quad 1 > \sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right| \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right)$$

Com efeito, a circunstância de $\begin{cases} a_{(i)j} - a_{oj} \geqslant 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{(i)j} - a_{oj}) > 0 \end{cases}$

exclue a combinação $a_{(i)j} \equiv a_{oj}$ porque $\sum_{j=1}^{n} (a_{oj} - a_{oj}) = 0$, o que contraria a segunda desigualdade invocada e o valor deste termo é $\prod_{j=1}^{n} | h_j |^{o} = 1$

Mas seja $Q > \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right|$ para todo e qualquer combinação (i); Q é finito porque $M_{(i)} \neq \infty$ e $M_o \neq 0$.

Substituindo $\left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right|$ por Q no segundo membro de desigualdade 49), obteremos:

$$\sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right| \cdot \left(\prod_{j=1} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right) \leqslant Q \sum_{(j)=(o)}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right)$$

mas

$$\sum_{(i)=(o)}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{(i)=(o)}^{\infty} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}}$$

e

$$\sum_{(i)=o}^{\infty} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} = \frac{1 - | h_j |^{\infty}}{1 - | h_j |} = \frac{1}{1 - | h_j |} \quad \text{e} \quad | h_j | < 1$$

Donde

$$Q \sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right) = Q \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - | h_j |} - 1 \right]$$

e para $| h_j | < \delta$ e δ suficientemente pequeno será

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - | h_j |} - 1 < | \varepsilon |$$

e $| \varepsilon |$ será suficientemente pequeno para que

$$Q \cdot | \varepsilon | < 1 \qquad \text{q. e. d.}$$

Teorema IV – A

$$(50) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k \, h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} | M_{(i)} | \prod_{j=1}^{n} \cdot | h_j |^{a_{(i)j}}$$

Se se verificar:

$$(51) \quad \begin{cases} A_k > 0 \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots n \\ p \quad \text{inteiro e positivo} \\ \left. \begin{array}{l} a_{(i)j} > 0 \\ a_{(i)k} \geqslant 2p \end{array} \right\} \text{inteiros} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p \\ | h_j | < | \delta | \quad \text{e} \quad | \delta | \text{ tão pequeno quanto se desejar} \end{cases}$$

Demonstração :

Do Teorema III A será ;

$$A_k\, h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j} \tag{52}$$

se for :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{(i)j} \geqslant 0 \\ a_{(i)k} \geqslant 2p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p \end{array}\right. \qquad \text{e} \quad |h_j| < |\delta| \tag{53}$$

Se escrevermos as desigualdades do tipo (52) para $k = 1, 2 \ldots n$ tendo o cuidado de não repetir termos já incluídos nas desigualdades precedentes e somando ordenadamente teremos :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \,.\, \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j}$$

se se verificar (51) q.e.d.

Nota : Daremos a designação de *ordem* de um termo da série ao número inteiro dado pelo somatório seguinte :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{(i)j}$$

Teorema V–A

Seja dada a série $S_T \equiv \sum_{(i)=(o)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}$

$$\text{Se} \quad \sum_{(i)=o}^{2p} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} > \sum_{k=1}^{n} A_k\, h_k^{2p} \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} A_k > 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} \leqslant 2p \\ \left\{\begin{array}{l} a_{(i)j} \geqslant 0 \\ p > 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{54}$$

então $S_T > 0$ para $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ suficientemente pequeno.
($a_{(i)j}$ e p são inteiros).

Demonstração :

A série S_T poderá escrever-se :

$$S_T = \sum_{(i)=o}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} = \underbrace{\sum_{(i)=o}^{2p} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}}_{\text{e } \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} \leqslant 2p} + \underbrace{\sum_{(i)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)}}_{\sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p} \tag{55}$$

Mas do teorema IV–A temos que :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, h_k^{2p} > \sum_{(j)}^{\infty} |M_{(i)}| \,.\, \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j} > \sum_{(i)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} \tag{56}$$

se for 51) e como é 56), será :

$$0 < \sum_{(i)=o}^{2p} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} > \sum_{(i)}^{\infty} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}$$

e de 55) será finalmente $S_T > 0$.

Nota: Diremos que um extremo se *decide* na ordem $2p$, quando $2p$ for a ordem da série finita e de menor ordem que verifica a desigualdade 54).

Teorema VI – A

A condição necessária, mas não suficiente, para que:

$$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{(i)j} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} \tag{57}$$

para $|h_j| < \delta$ e δ suficientemente pequeno é a seguinte:

$$\text{ou} \quad \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo} = 2p \\ \text{e} \\ \quad M_{(i)} > A_k \end{cases} \tag{58} \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo} < 2p \\ \text{e então será:} \\ \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo par} \\ M_{(i)} > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{59}$$

sendo $A_k > 0$ e p inteiro positivo.

Demonstração

A desigualdade 57) se for verdadeira sê-lo-á também para $h_j = 0$ e $j \neq k$

Donde
$$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} > A_k h_k^{2p} \qquad \text{para } k = 1, \ldots. n \tag{60}$$

Mas para satisfazer 60) duas hipóteses se podem verificar:

ou $a_{(i)k}$ *mínimo* $= 2p$

e então
$$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} = M_{(i)} \textit{ mínimo} \times h_k^{2p}$$

Donde $M_{(i)}$ mínimo $> A_k > 0$ para satisfazer 60)

ou $a_{(i)k}$ *mínimo* $< 2p$

e então
$$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} = M_{(i)\,\text{min.}} \cdot h_k^{a_{(i)k\,\text{mínimo}}} \times S$$

onde
$$S = 1 + \sum_{(i)} \frac{M_{(i)\,\text{min.}}}{M_{(i)}} \cdot h_k^{a_{(i)k} - a_{(i)k\,\text{mínimo}}}$$

e como $a_{(i)k} - a_{(i)k}$ mín $\geqslant 0$

será $\begin{cases} S = 1 + \varepsilon \\ \text{e} \\ |h_k| < |\delta| \end{cases}$ e haverá sempre um $|\delta|$ suficientemente pequeno, tal que $|\varepsilon|$ possa ser mais pequeno do que um número arbitràriamente pequeno dado.

Mas $a_{(i)k}$ mínimo $< 2p$, donde se $M_{(i)\,\text{min}} > 0$ e $a_{(i)}$ mínimo par, será satisfeito 60), mas se $M_{(i)\,\text{mínimo}} < 0$ ou $a_{(i)k\,\text{min}}$ ímpar então 60) não é satisfeito.

Portanto as condições 58 e 59 são necessárias mas não suficientes. q.e.d.

Teorema VII–A

— Verificado que para todos os $k = 1, \dots n$ são satisfeitas as desigualdades referidas no teorema VII-A até à ordem 2 p.

— Verificado que para todos os termos de expoente par mas de coeficiente negativo ou para os termos de expoente ímpar (um pelo menos), as desigualdades do Teorema II-A se verificaram no sentido inverso, igualmente até à ordem 2 p.

Então a série S_T é positiva definida.

Demonstração

Do Teorema I-A, temos que:

$$61) \qquad |M_r| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{rj}} < \sum_{i=1}^{m} |M_i| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{ij}}$$

$$|h_j| < |\delta| \quad \text{e} \quad |\delta| \text{ suficientemente pequeno.}$$

Significando r qualquer dos s termos pares de coeficiente negativo ou ímpares (um expoente ímpar) e significando $i = m$ os termos pares positivos da série até à ordem 2 p que existem na série.

Tendo em vista a demonstração do Teorema II-A, a desigualdade 61) poderá ainda escrever-se:

$$|M_r| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{rj}} < \frac{1}{s} \cdot \sum_{i=1}^{m} |M_i| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{ij}} \quad \text{e} \quad |h_j| < |\delta'| < |\delta|$$

$$62) \qquad \text{ou} \quad \sum_{r=1}^{s} |M_r| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{rj}} < \sum_{i=1}^{m} |M_i| \prod_{j=i}^{n} |h_i|^{a_{ij}} \quad \text{e} \quad |h_j| < |\delta,|$$

$$\text{note-se que} \begin{cases} |M_i| = M_i > 0 \\ \text{e} \quad a_{ij} = \text{pares e positivos} \end{cases}$$

Do Teorema VI-A será ainda, por hipótese:

$$(63) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} M_i h_k^{a_{ik}} > A_k h_k^{2p} \quad \text{e} \quad A_k > 0 \\ \text{e} \quad |h_k| < \delta'' \end{cases}$$

e haverá $k = n$ desigualdades deste tipo.

$$(64) \qquad \text{Donde} \qquad \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_i h_k^{a_{ik}} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

$$\text{e} \quad |h_k| < \delta''$$

mas (62) e (64) podem ainda escrever-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{r=1}^{s} |M_r| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{rj}}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

$$(65) \qquad \text{Donde} \qquad \sum_{i=j}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{s=i}^{s} M_2 \cdot \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{rj}} + \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

mas já vimos que: (Teorema IV A)

$$(66) \qquad \sum_{k=k}^{n} A_k h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \cdot \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j}}$$

Substituindo (66) em 65 obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{r=1}^{s} |M_r| \prod_{j=i}^{n} |h_j|^{a_{rj}} + \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \cdot \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j}}$$

ou retirando os módulos será:

$$S_T = \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} + \sum_{r=1}^{s} M_r \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{rj}} + \sum_{(i)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{(i)j}} > 0$$

q.e.d.

Conclusão

É dada uma função φ $(Z_1 \ldots . Z_n)$ e procura-se saber se tem um extremo no ponto P $(Z_{10}, \ldots Z_{n0})$, até à ordem 2 p e admitimos que φ $(Z_1 \ldots Z_n)$ é susceptível de desenvolvimento da série de Taylor na região do espaço que contém P no seu interior.

Modo de proceder:

1) Efectua-se esse desenvolvimento até à ordem 2p.
2) Verifica-se a condição necessária referida no teorema VI A para todos $k = 1, \ldots n$.
3) Verifica-se as condições do teorema VI A para todos os termos pares negativos ou ímpares existentes na série limitada até à ordem 2p.
4) Então se 1, 2 e 3) forem satisfeitos podemos afirmar que φ tem um extremo em P, definível até à ordem 2p.
5) Se as condições (nomeadamente 2 e 3) não forem satisfeitas poderá tentar-se uma série finita mais extensa de ordem $>$ 2p e repetir a verificação.

Finalmente tem interesse fazer uma referência ao emprego de ordenadores para resolver os sistemas de desigualdades lineares relativos ao teorema VI A.

Com efeito, os métodos mecanográficos são particularmente úteis na resolução destes sistemas de desigualdades.

Note-se que se as funções forem polinomiais, pode tratar-se desde início a série finita cuja ordem é igual ao grau de polinomio.

ALGUMAS REFERÊNCIAS

— The Theorey of functions of a real Variable — Dover — Hobson
— Treatise on Diferencial Equations — Mc. Millan — Forsyth
— The Theory of Matrices — Chelsea — Gantmacher
— Matrix Calculus - Norlh-Holland — Bodewig

RESUMO

Generalização a um espaço de n dimensões dos Teoremas e métodos já apresentados.

RÉSUMÉ

Géneralisation a un espace a n dimentions des theorémes e méthodes déjá présentés.

SUMARY

Generalisation to a n dimentional Space of the Theoremes and methods already presented.

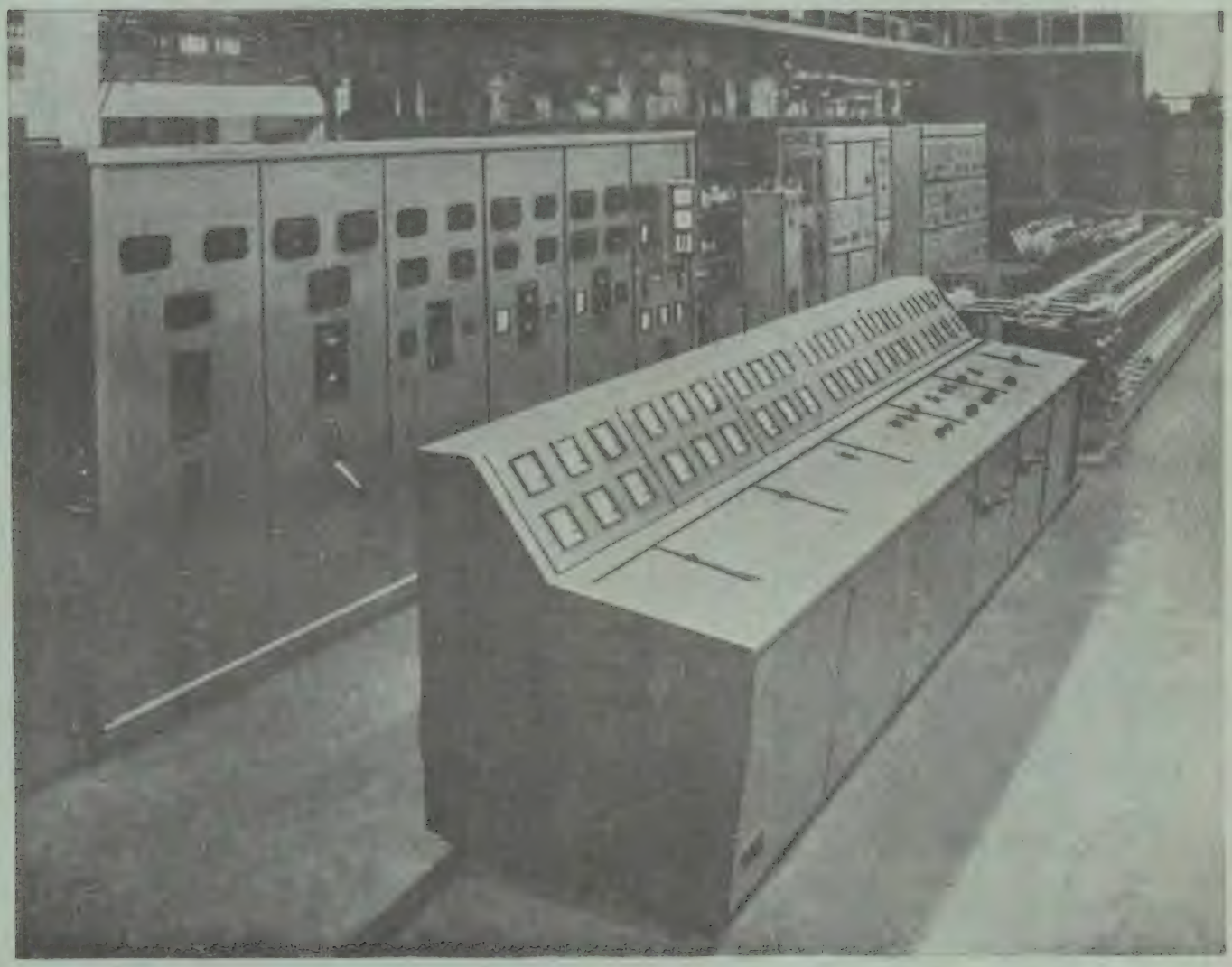
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

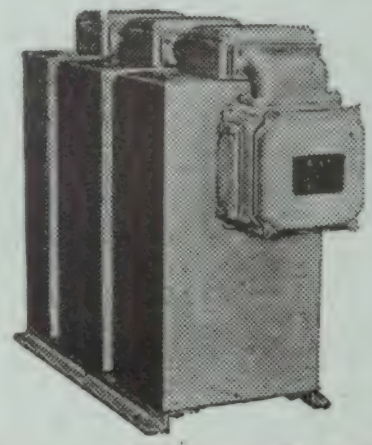


Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

CONDENSADORES **ASEA**

PARA MELHORAMENTO DO FACTOR DE POTÊNCIA



Bateria de condensadores tipo CLB, 32 kVAr

- SE PAGA POR CONSUMO DE ENERGIA REACTIVA...
- SE A SUA INSTALAÇÃO ELÉCTRICA ESTÁ SOBRECARREGADA...

...consulte:

ASEA ELÉCTRICA L.DA

SEDE EM LISBOA
R. DE ARTILHARIA UM, 104,4.º-D.º
Telefone P.P.C. — 68 90 17/8/9

END. TELEG.
ASEAPORT

FILIAL NO PORTO
R. DO CAMPO ALEGRE, 144
Telefone P.P.C. — 6 21 06/7

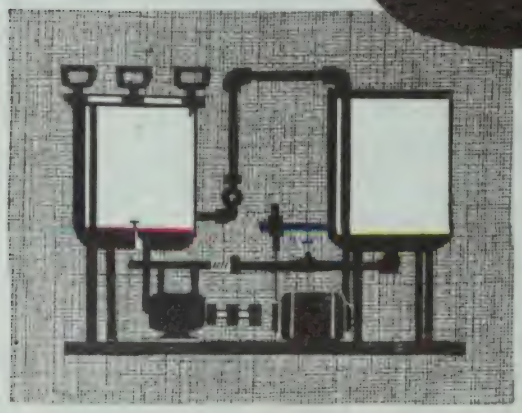
filtros

FILFRO, L.da

ALGUMAS DAS PRINCIPAIS APLICAÇÕES:

Água • Açúcar • Óleos vegetais, animais e minerais • Cerveja
Sabão líquido • Resinas naturais e sintéticas • Vinhos • Vinagre
Glicerina • Tintas • Vernizes
Sumos de frutos • Xaropes
Azeite • Industria química

FILTROS NACIONAIS PARA TODOS OS PROBLEMAS DE FILTRAÇÃO



Inteiramente fabricados em Portugal, por técnicos e operários portugueses, segundo a patente port. n.º 29.917

Dezenas de instalações a funcionar no país atestam a sua excelente qualidade.

RUA CAPITÃO FILIPE DE SOUSA, 128
CALDAS DA RAINHA

FILTROS FILFRO, L.da PORTUGAL

C. D. U. 691.328 : 539.37

REFLEXÕES SOBRE A FISSURAÇÃO E DEFORMAÇÃO NO BETÃO ARMADO

LUÍS AROUCA
ANTÓNIO MEXIA HEITOR
Eng.os Civis (I. S. T.)

2.ª Parte

4. A INCIDÊNCIA DOS FENÓMENOS DE FISSURAÇÃO E DE DEFORMAÇÃO NO DIMENSIONAMENTO EM BETÃO ARMADO

O estudo anteriormente apresentado, baseado na resistência do betão à tracção bem como na consideração dos efeitos de contracção e fluência, permite dimensionar peças de betão armado diminuindo apreciàvelmente a incidência dos fenómenos de fissuração e de deformação.

Para tal, há que ter em conta as reais características dos materiais empregados e complementarmente, durante a execução da obra, é fundamental que sejam tomadas medidas adequadas para prever os fenómenos em causa.

Referir-se-ão seguidamente alguns critérios de dimensionamento e disposições construtivas adequadas para o conseguir.

4.1 *Critérios de dimensionamento*

A consideração do fenómeno da fissuração no dimensionamento do betão armado pode ser encarada sob dois prismas:

- dimensionamento de estruturas cujo condicionalismo exige completa ausência de fissuras, como é o caso de reservatórios para fluidos, estruturas existentes em meios agressivos, e outras. Nesta óptica, a multiplicidade de parâmetros envolvidos, como se infere da expressão (12), denota a irrelevância duma afirmação apriorística que inibe a utilização de aços de alta resistência de elevada tensão admissível σ_a, em que portanto a percentagem de armadura γ é pequena, em peças de betão armado isentas de fissuras. A garantia duma qualidade de betão que conduza a um elevado σ'_{br}, parece mesmo, em princípio, assumir a posição de factor dominante.
- dimensionamento de estruturas em que se admite um determinado grau de fissuração traduzido por uma largura máxima de fissura admissível. É o caso mais corrente de estruturas de betão armado, em que se despreza a contribuição do betão para a absorção dos esforços de tracção supondo as peças fissuradas abaixo da fibra neutra. Note-se, contudo, que mesmo que a largura máxima de fissura não ultrapasse os valores admissíveis, interessa limitar a extensão da zona fissurada da peça para impedir uma deformação excessiva.

A análise do problema da fissuração que em si próprio tem um carácter estatístico, pode desdobrar-se na determinação de fórmulas empíricas para estimar o espaçamento das fissuras, e na determinação da relação entre o espaçamento das fissuras e a sua largura.

Os parâmetros básicos que influem no fenómeno da fissuração do betão armado em função das condições de trabalho das peças são múltiplos e complexos, e o seu estudo tem sido abordado experimentalmente nos principais centros mundiais de investigação de engenharia civil, conduzindo à dedução de várias fórmulas, òbviamente de valor limitado, mas que, como diz Wästlund «servem

satisfatòriamente como prova, assegurando que a estrutura se comportará bem no que respeita à formação de fissuras». Porém, este aspecto do problema sai fora do âmbito deste artigo. Interessa apenas focar a determinação da extensão da zona fissurada, independentemente da largura das fissuras, através da sua repercussão no fenómeno da deformação.

Apresenta-se a seguir um exemplo em que é posto em relevo este fenómeno:

Seja uma laje em consola com um balanço de 3,50 m numa pala de cobertura (elemento no qual o peso próprio assume uma importância principal). Convém, quer por condicionalismos de ordem estética, quer de ordem construtiva (escoamento de água e outros), que tal pala não apresente uma fissuração acentuada com a consequente repercussão na ordem de grandeza da flecha verificada, e como habitualmente, supõe-se que razões de ordem arquitectónica aconselham um dimensionamento com espessuras reduzidas.

Considera-se um betão a que corresponde $\sigma'_{br} = 500$ kg/cm², que de acordo com as normas S. I. A., conduz aos seguintes valores para as tensões de rotura em tracção por flexão

$$\text{após } 7 \text{ dias} \quad \sigma'_b = 0{,}75 \times 3 \times \sqrt{500} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{» } 28 \text{ » } \quad \sigma'_b = 3 \times \sqrt{500} = 67 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{» } 90 \text{ » } \quad \sigma'_b = 1{,}15 \times 3 \times \sqrt{500} = 77 \text{ kg/cm}^2$$

Considera-se uma sobrecarga de 0,15 t./m². Arbitrando uma altura no encastramento de 15 cm e na extremidade de 6 cm, ter-se-á através da composição das diversas solicitações, um momento flector de lei parabólica, cujo valor no encastramento será

$$M_e = \frac{3{,}5^2}{2}\, 0{,}15 + 2{,}4 \left[\frac{3{,}5^2}{2} \times 0{,}06 + \frac{3{,}5^2}{12} (0{,}15 - 0{,}06) \right] = 2{,}02 \text{ t.m/m}$$

Para que se não obtenham fissuras será necessário que o momento de fissuração esteja coberto em toda a extensão do balanço da pala.

O momento de fissuração no encastramento é após 28 dias

$$M_{r28} = 67 \times \frac{100 \times 15^2}{6} = 2{,}51 \text{ t.m/m}$$

Note-se desde já que, como após 7 dias o momento de fissuração no encastramento é

$$0{,}75 \times 2{,}51 = 1{,}88 \text{ t.m/m} < 2{,}02 \text{ t.m/m}$$

não se deve descofrar e aplicar a sobrecarga. Já após 28 dias, o coeficiente de segurança à fissuração será de

$$\frac{2{,}51}{2{,}02} = 1{,}4$$

Se se entrar em conta com a fluência, então o valor de σ'_b reduz-se (fig. 13) e por consequência também o momento de fissuração. As normas S. I. A. dão a relação

$$\sigma'_b / \sigma'_{br} = 3/1{,}5 = 2$$

e assim pela fórmula (5) vem $\beta = 5$. Por outro lado, a resistência do betão em tracção por flexão dos 28 aos 90 dias varia com $\varphi = 1{,}4$ (ver S. I. A. art. 63).

Os valores de tensão de rotura em tracção pura são:

$$\sigma'_{br28} = 1{,}5 \sqrt{500} = 33 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{br90} = 1{,}15 \times 1{,}5 \sqrt{500} = 38 \text{ kg/cm}^2$$

donde pela fórmula (28) tem-se aproximadamente

$$\frac{33+38}{2}\left(1{,}35+0{,}13\,\frac{5}{1{,}4}\right)=64\ \text{kg/cm}^2$$

em vez de 77 kg/cm².

Se a laje fosse descofrada após 7 dias sem se aplicar a sobrecarga, ela não teria fissuras visto que o momento de fissuração seria 1,88 t.m/m e o do peso próprio, 1,1 t.m/m.

Porém, até à conclusão da fluência ter-se-ia pelas normas S. I. A. (art. 63) o valor de $\varphi = 2{,}5$, e o valor da resistência à tracção por flexão (após fluência) baixava para 61 kg/cm². O momento de fissuração correspondente, 2,24 t.m/m, só daria um coeficiente de segurança de

$$\frac{2{,}24}{2{,}02}=1{,}1$$

Interessa agora comparar os valores que se obtêm para as flechas no caso da laje sem fissuras e no caso da laje com a zona de betão à tracção completamente fissurada. Os cálculos da laje não fissurada, fig. 14, (em fase I) serão feitos com o valor do módulo de elasticidade do betão dado pelas normas S. I. A.

$$E_b = 600.000\,\frac{500}{500+200}=430.000\ \text{kg/cm}^2$$

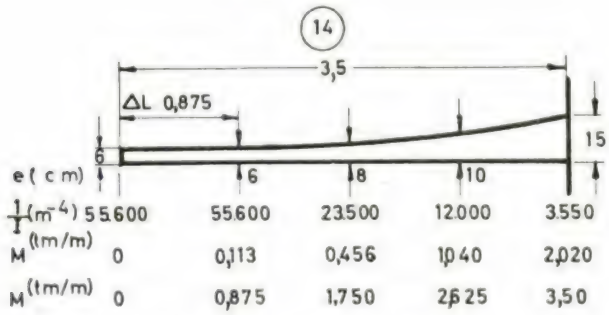


Fig. 14 — Laje em consola na fase I

A expressão que dá a flecha é

$$f=\frac{1}{E_b}\int M_I\,\frac{M_p}{I}\,dx=\frac{1}{E_b}\times\frac{\Delta L}{3}\int\left[M_I\,.\,M_p\,.\,\frac{1}{I}\right]$$

em que M_I é o momento devido a uma carga unitária aplicada na extremidade (secção em que se pretende conhecer a flecha) e M_p é o momento devido às solicitações.

Para o cálculo do integral que aparece na expressão aplicou-se o método de Simpson, dividindo o vão da laje, 3,50 m, em quatro troços de 0,875 m. No quadro que se apresenta a seguir, é feito o seu cálculo

N.º	K	1/I	M_p	M_I	$K\,\frac{M_p\,M_I}{I}$
0	1	55 600	0	0	0
1	4	55 600	0,113	0,875	22 000
2	2	23 500	0,456	1,750	37 600
3	4	12 000	1,040	2,625	130 800
4	1	3 550	2,020	3,500	24 600
					Σ 215 000

A partir das operações indicadas no mesmo quadro obtém-se o valor para a flecha de

$$f = 100 \frac{215000 \times 0{,}875}{3 \times 430000} = 1{,}32 \text{ cm}$$

Determinou-se seguidamente o valor da flecha para a laje fissurada (em fase II) partindo da hipótese que a armadura está adaptada ao diagrama de momentos flectores de tal modo que σ_a é constante.

A consola foi dividida do mesmo modo que no primeiro caso. Na primeira linha da fig. 15, indicam-se as alturas úteis h, na segunda está o valor h (1-Kx) e na terceira linha os raios de curvatura determinados de acordo com a equação (14) para $\sigma_a = 3000$ kg/cm².

Na determinação das flechas pode proceder-se por etapes, entrando com os raios de curvatura sucessivos no valor de $\Delta l^2/2R$, mantendo os pontos de tangência que descem de $\alpha . \Delta l$ em virtude da rotação $\alpha = \frac{\Delta l}{R}$.

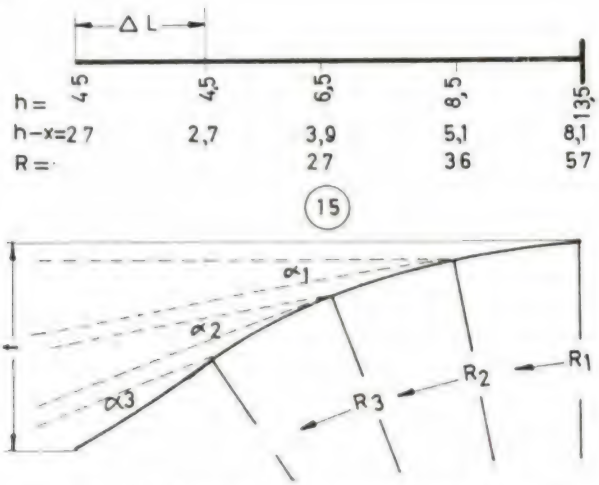


Fig. 15 — Deformada da laje em consola na fase II

Portanto f será dado pela sucessão

$$f = l\,\Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2R_1} + \frac{3}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{2R_2} + \frac{2}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{2R_3} + \frac{1}{R_3} \right) \right]$$

Admite-se o último troço recto visto que a espessura não se reduz a zero e esse troço ficará no estado I.

A aplicação numérica dá

$$f = 100 \times 0{,}875^2 \left[\frac{1}{2{,}57} + \frac{3}{57} + \frac{1}{2{,}36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{2{,}27} + \frac{1}{27} \right] = 14{,}3 \text{ cm}$$

Note-se, ante a diferença de valores obtidos num caso e noutro, respectivamente de 1,32 cm para a laje consola não fissurada e de 14,3 cm para o caso de total fissuração, a extrema importância com que o fenómeno de fissuração se reflecte no da deformação.

Claro que a amplitude da diferença registada se refere a um caso extremo, escolhido de propósito para pôr em evidência o problema, mas de qualquer forma, significativo.

Veja-se agora um caso mais corrente, que traduzindo em última análise a incidência da fissuração na deformação, exprime igualmente a ponderação de toda a problemática analisada ao longo do artigo.

Seja, por exemplo, uma laje simplesmente apoiada com 15 cm de espessura e um vão de 4,65 m (esbelteza 1/35) sujeita a uma carga total uniformemente distribuída de 0,735 t/m². Considera-se como tensão admissível no aço $\sigma_a = 4.000$ kg/cm².

Resulta:

Momento flector	$M = 0{,}735 \times 4{,}65^2/8 = 1{,}98$ tm/m
Tensão no betão	$\sigma_b = 110$ kg/cm²
Momento de fissuração	$M_r = 100 \times 15^2/115 = 1{,}95$ tm/m

Valores das flechas atendendo à fissuração e aos fenómenos de contracção e fluência do betão:

Comprimento fissurado

$\mu = (4{,}65 - 0{,}56) / 4{,}65 = 0{,}88$; $Kx = 0{,}215$

Flecha estática

Raio de curvatura R (expressão 14)

$$R = 0{,}135\ (1 - 0{,}215)\ \frac{Ea}{4000} = 55{,}5 \text{ m}$$

Flecha (expressão 16)

$$f = \frac{4{,}65^2}{8 \times 55{,}5}\ (1 - 0{,}88^2)\ .\ 100 = 1{,}08 \text{ cm}$$

Flecha devida à contracção — $\varepsilon_s = 0{,}3\ ^0/_0$

Raio de curvatura R_s (expressão 20)

$$R_s = 0{,}135 \left(1 - \frac{0{,}215}{2}\right) . \frac{1000}{0{,}3} = 400 \text{ m}$$

Flecha (expressão 16)

$$f_s = \frac{4{,}65^2}{8 \times 400}\ (1 - 0{,}88^2) \times 100 = 0{,}15 \text{ cm}$$

Flecha devida à fluência — $\varphi = 2{,}5$

Determinação do raio de curvatura (expressões 21 a 27)

$$R_\varphi = \frac{1{,}98}{(100 \times 13{,}5)\ 13{,}5 \times 0{,}93 \times 400} = \frac{0{,}292}{100}$$

$$D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100}{10 \times 0{,}292 \times 2{,}5}} = 6\ 32$$

$$D_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100}{10 \times 0{,}292}} = 9{,}30$$

$R_\varphi = 47$ m

Flecha (expressão 16)

$$f_\varphi = 1{,}08\ \frac{55{,}5}{47} - 1{,}08 = 0{,}20 \text{ cm}$$

Flecha total da laje parcialmente fendida

$$f + f_s + f_\varphi = 1{,}43 \text{ cm}$$

Flecha função do tempo

$$f_s + f_\varphi = 0{,}35 \text{ cm}$$

Note-se que o facto de se ter considerado uma peça com elevado grau de estabeleza e de se ter dimensionado a peça com um aço de elevada tensão admissível ($\sigma_a = 4.000$ kg/cm^2) não conduz a flechas cujos valores sejam superiores aos usuais no dimensionamento corrente.

4.2 *Disposições construtivas*

Conforme já referido, e complementarmente com um cuidadoso critério de dimensionamento que atenda à problemática da fissuração e da deformação em betão armado, impõe-se que a execução da obra seja sempre acompanhada dum conjunto de disposições construtivas adequadas à consecução de tal finalidade.

As principais causas que levam ao aparecimento de fissuras nas obras de betão armado, apesar da sua problemática ter sido devidamente ponderada num dimensionamento criterioso, são fundamentalmente a cedência das cofragens e a contracção.

4.2.1. *Cedência das cofragens durante ou logo após a betonagem*

Se o escoramento não suportar o peso do betão, pode haver movimentos no início da presa, quando o betão ainda tem pequena resistência à tracção, ocasionando fissuras, por vezes em localizações aparentemente inexplicáveis.

4.2.2. *Contracção do betão*

Na fig. 16, apresentam-se curvas de contraccção do betão em função do tempo para casos típicos de peças correntes em obras de betão armado. A curva 1 mostra a contracção de um elemento bidimensional (pequena espessura), como uma laje, a qual está sujeita aos raios solares. A curva 2 mostra a contracção de elementos volumosos, cujo endurecimento é dificultado por condições geométricas e em que a sua situação na estrutura os expõe menos à acção dos raios solares. A curva 3 mostra a variação no tempo das resistências do betão à tracção σ'_{br}.

Por exemplo, num caso corrente duma laje com os bordos livres, como seja uma consola ligada monolìticamente a uma viga de fachada, o elemento volumoso — a viga — tem uma exposição totalmente diferente da da laje, sendo a sua presa mais lenta. Como o aumento de resistência do betão à tracção não acompanha a variação diferencial de contracção dos dois elementos, há a possibilidade de fissuração.

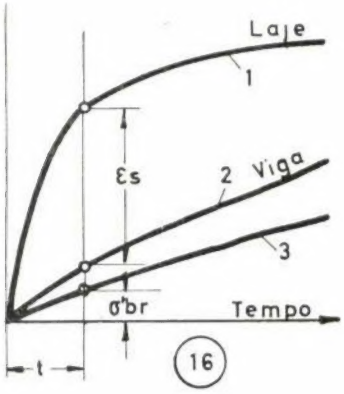


Fig. 16 — Variação da contracção e da resistência do betão à tracção com o tempo

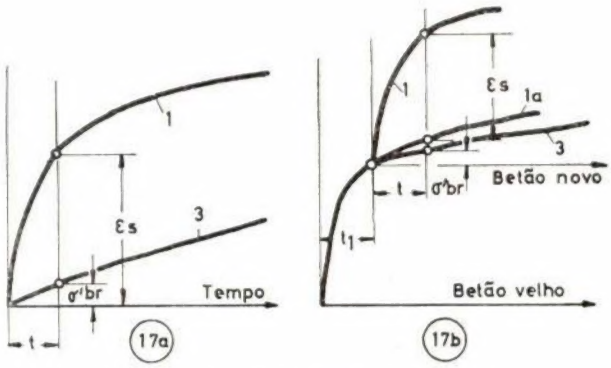


Fig. 17 — Fissuração devido à diferença entre a velocidade de endurecimento e de contracção

Destas diferentes condições de contracção, resulta, como se mostra por exemplo na fig. 17 a, que no caso de uma laje que foi betonada por cima de uma superfície de um material não sujeito à contracção mas com aderência ao betão, o encurtamento devido à contracção ε_s cresce com maior

rapidez do que a resistência do betão à tracção σ'_{br}, ocasionando uma fissuração no betão novo. A fig. 17 b mostra o caso de se betonar com um betão novo (1) por cima de um betão que já está num estado adiantado da sua contracção (la). O desfasamento em tempo é igual a t_l. Também agora a contracção ε_s atinge um valor importante numa ocasião em que o novo betão tem um baixo valor de resistência à tracção σ'_{br}.

Estes fenómenos não podendo ser totalmente evitados, podem ser atenuados se se mantiverem permanentemente húmidos, sobretudo o betão dos elementos de grande superfície, durante um período de tempo razoável para que σ'_{br} possa aumentar com o tempo até que o betão tenha atingido uma elevada resistência à tracção.

No caso das figs. 17 a e 17 b a situação ainda pode ser melhorada se molharmos intensivamente a superfície do betão já executado antes de se efectuar a nova betonagem.

CONCLUSÕES

Procurou mostrar-se ao longo deste artigo a influência dos fenómenos de fissuração e deformação no cálculo do betão armado e a forma como os seus efeitos devem ser considerados no dimensionamento em ligação também com os fenómenos da contracção e fluência do betão. Verificou-se ser possível dimensionar em betão armado com completa ausência de fissuras, o que, contudo, podendo conduzir a soluções menos económicas, só será de considerar em casos em que tal condicionamento seja exigido pelas condições de utilização das peças. Nos casos correntes, é perfeitamente admissível um determinado grau de fissuração embora convindo que as zonas fissuradas não sejam muito extensas para não agravar excessivamente o fenómeno da deformação.

Focou-se ainda o primordial aspecto de execução das estruturas que condiciona o fenómeno da fissuração, por tal forma que se afigura inútil qualquer dimensionamento teórico que não seja acompanhado de adequada execução em obra.

NOMENCLATURA

Na simbologia apresentada procurou seguir-se na medida do possível os critérios definidos pelo «Comité Europeu do Betão».

b	— largura genérica duma secção
b_o	— largura da alma duma viga em T
f	— flecha genérica duma viga
g	— distâncias do apoio à primeira fissura numa peça solicitada à flexão
h	— altura útil duma secção trabalhando à flexão
h_o	— espessura da aba duma viga em T
h_t	— altura total duma secção trabalhando à flexão
$m = \dfrac{N}{b h_t \sigma'_{br}}$	
$n = \dfrac{E_a}{E_b}$	— coeficiente de homogeneização aço-betão
q	— carga uniformemente distribuída numa viga
x	— distância da fibra neutra à fibra mais comprimida duma secção trabalhando à flexão
y	— distância da fibra neutra à primeira fibra mais traccionada, do diagrama de tracção no betão duma secção trabalhando à flexão (v. fig. 2, pág. 692)
y	— distância da linha neutra à fibra mais comprimida numa secção sujeita à contracção (v. fig. 10 pág. 701)

$D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\gamma\varphi}}$

$D_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\gamma}}$

E_b — módulo de elasticidade do betão

F_M — área do diagrama de momentos solicitantes, na zona duma peça solicitada à flexão, trabalhando em fase II (v. fig. 9 pág. 700)

F_E — área do diagrama de momentos efectivamente absorvidos pela armadura na mesma zona (v. fig. 9, pág. 700)

I — momento de inércia duma secção solicitada à flexão

$K_x = \frac{x}{h}$

$K_y = \frac{y}{h}$

L — vão duma peça solicitada à flexão

M_d — momento flector diferencial de equilíbrio numa secção sujeita à contracção (v. fig. 10, pág. 701).

M_r — momento de fissuração duma secção

N — esforço axial (o esforço de tração tem sinal positivo)

N_b — força total absorvida pelo betão na zona comprimida de uma peça à flexão

N'_b — força total absorvida pelo betão na zona traccionada de uma peça à flexão

R — raio de curvatura duma peça solicitada à flexão

W — módulo de resistência duma secção solicitada à flexão

Z — força exterior de tracção numa peça de betão armado

Z_r — força exterior de tracção que provoca o aparecimento de fissuras numa peça de betão armado

$\beta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_b}$ — coeficiente de curvatura

$\gamma = \frac{A_a}{A_b}$ — percentagem de armadura de uma secção

$\delta_x = \frac{x}{h_t}$

$\delta_y = \frac{y}{h_t}$

ε_a — encurtamento devido à contracção de uma peça de betão armado

ε_b — extensão genérica no betão

ε_c — extensão de rotura do betão em tracção

ε_s — encurtamento devido à contracção duma peça de betão simples

θ — ângulo de rotação do apoio duma peça solicitada à flexão

$\mu = \frac{g}{L/2}$

$\mu = \frac{h_o}{h_t}$

$\rho = \frac{b}{b_o}$ — em que b — largura da laje interessada (viga T)

σ_a — tensão genérica no aço

σ_{a_o} — tensão genérica no aço ao iniciar-se a fluência

σ_b — tensão genérica no betão

σ_{b_o} — tensão genérica no betão ao iniciar-se a fluência

σ_{br} — tensão de rotura do betão em compressão (cubos)